АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3666—4491

*

№ 5 1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, В. С. Балакшин, В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, А. Н. Седов, В. В. Серпинский, С. А. Шиканов (зам. председателя), Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 2
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 6
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 13
Группы 14
Поля, кольца и структуры 18
Алгебраическая теория схем связи и управления 22
Топология 23
Теория функций действительного переменного 29
Теория множеств 32
Приближение функций полиномами и их обобщениями 32
Теория функций комплексного переменного 37
Дифференциальные уравнения 47
Обыкновенные дифференциальные уравнения 47
Уравнения в частных производных . . . 51
Приложения к физике, технике и естественным наукам 65
Интегральные уравнения 71
Приложения интегральных уравнений . . . —
Вариационное исчисление 75
Анализ (другие вопросы) 77
Числовые ряды 83
Специальные функции 85
Интегральные преобразования и операционное исчисление 90
Приложения общих методов математического анализа 93
Функциональный анализ 94
Теория вероятностей 101
Математическая статистика 104
Теория игр и математическая экономика 110
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 111
Геометрия 115
Приложения геометрии 117
Проективная и начертательная геометрия 118
Алгебраическая геометрия 119
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 121
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 124
Метрические методы в геометрии 130
Геометрия выпуклых многообразий . . . 131
Численные и графические методы 131
Таблицы 141
Вычислительные машины и математические приборы 143
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 159

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 3666—4491 **№ 5** **Май 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3666. К итогам Всесоюзного математического съезда. В и н о г р а д о в И. М., Вестн. АН СССР, 1956, № 9, 3—7

Общий обзор работы Третьего Всесоюзного математического съезда, состоявшегося в Москве 25 июня — 4 июля 1956 г. На съезде присутствовало около 2500 ученых из различных городов Советского Союза и более 70 ученых-иностранцев. Дан краткий исторический обзор развития математики в дореволюционной России и в советский период. Дана также краткая общая характеристика основных исследований, обсуждавшихся на съезде. В конце статьи обсуждается ряд организационных мероприятий, проведение которых в жизнь будет способствовать дальнейшему развитию исследовательской работы в области математики.

3667. Новые успехи советских математиков. К итогам 3-го Всес. матем. съезда. В и н о г р а д о в И. М., Природа, 1956, № 12, 68—69

3668. Обсуждение состояния и основных направлений развития деятельности АН УзССР на объединенном заседании президиумов АН СССР и АН УзССР. Г у р е в и ч А. М., УзССР фанлар акад. ахбороти, Изв. АН УзССР, 1956, № 3, 113—119

3669. На 43-й сессии Индийского научного конгресса. Т о п ч и е в А. В., Вестн. АН СССР, 1956, № 5, 60—63

3670. Список членов Математического общества Франции на 30 июня 1956 г. (Liste des membres de la Société mathématique de France à la date du 30 juin 1956. Docum. math., 1956, № 33, 41 p.) (франц.)

3671. Апрельское собрание в Чикаго (The April meeting in Chicago), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, **62**, № 4, 347—368 (англ.)

Отчет о 523-м заседании Американского математического общества, происходившем 12—14 апреля 1956 г. в Чикагском университете. Приведены аннотации 68 представленных работ по алгебре и теории чисел, анализу, прикладным вопросам, геометрии, логике и основаниям математики, статистике и теории вероятностей, топологии.

3672. Апрельское собрание в Нью-Йорке (The April meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, **62**, № 4, 369—400 (англ.)

Отчет о 524-м заседании Американского математического общества, происходившем 20—21 апреля 1956 г. в Колумбийском университете. Приведены аннотации 88 представленных работ по алгебре и теории чисел, анализу, прикладной математике, геометрии, логике и основаниям математики, статистике и теории вероятностей, топологии.

3673. Апрельское собрание в Монтерей (The April meeting in Monterey), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, **62**, № 4, 401—414 (англ.)

Отчет о 525-м заседании Американского математического общества, состоявшемся 28 апреля 1956 г. в морской школе в Монтерей, Калифорния. Приведены аннотации 42 представленных работ по алгебре и теории чисел, анализу, прикладной математике, геометрии, логике и основаниям математики, статистике и теории вероятностей, топологии.

3674. Четвертый математический конгресс в Австрии. Международная встреча математиков. Х о э н б е р г (Vierter Österreichischer Mathematikerkongreß. Internationales Mathematikertreffen. Wien, 17. bis 22. September 1956. H o h e n b e r g F.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 6, 285 (нем.)

Конгресс происходил в Вене 17—22 сентября 1956 г.

3675. О новом издании Воронежского университета. М ы ш к и с А. Д., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 258—259

Сообщается о выходе из печати первых двух выпусков Трудов семинара по функциональному анализу (семинар работает при Университете под руководством М. А. Красносельского, С. Г. Крейна и В. И. Соболева).

3676. Основные черты кибернетики. С о б о л е в, К и т о в, Л я п у н о в (Trăsăturile fundamentale ale ciberneticii. S o b o l e v S. I., K i t o v A. I., L e a p u n o v A. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1956, **10**, № 3, 80—97 (рум.)

Перевод из журнала «Вопросы философии», 1955, № 4 (РЖМат, 1957, 9).

3677. Что такое кибернетика? К о л ь м а н (Ce este cibernetica? K o l m a n E.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1956, **10**, № 3, 98—114 (рум.).

Перевод из журнала «Вопросы философии», 1955, № 4 (РЖМат, 1957, 12).

3678. Применение кибернетики в машиностроении. М о ж а е в С. С. В сб.: Прогрессив. технол. машиностроения. Вып. 1, М.—Л., Машгиз, 1956, 273—296

3679. Понятие о множестве и функции при изложении для начинающих. П и к к е р т (Der Mengen- und Funktionsbegriff in der Anfängervorlesung. P i c k e r t G ü n t e r), Math.-phys. Semesterber., 1956, **5**, № 1—2, 71—79 (нем.)

Высказывается опасение, что при изложении начал курса дифференциального и интегрального исчисления вследствие отсутствия курса логики понятие множества может остаться без всякого определения. Автор высказывает соображения методического характера о введении понятий функций, производных, интегралов и об их обозначениях. П. И. Романовский

3680. Математика и облик людей. Хунгер (Mathematik und Menschenbild. Hunger E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 1, 1—9 (нем.)

Преподавание математики в средней школе, особенно в старших классах, должно находиться в связи с историческими, философскими, общекультурными и т. д. проблемами. Подбор и разрешение последних, по мнению автора, должны производиться комплексно, при изложении основ всех наук и давать ответ на вопрос: что такое человек? В качестве примеров такого комплексного рассмотрения выбраны проблема иррациональных чисел у древних греков, работа Ламберта (1728—1777) по теории перспективы, принцип наименьшего действия.

Примечание референта. Проблемы, затрагиваемые в статье, автор рассматривает преимущественно с идеалистических позиций; в значительной мере он опирается на ненаучную идею о преимуществах «западного» образа мышления. К. А. Рыбников

3681 К. Основные понятия математики. Мурман (Fundamental concepts of mathematics. 2hd ed. Moorman Richard Herbert. Burges, 1955, 92 pp., ill., 2.75 doll), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 2, 66 (англ.)

3682 К. Справочник по элементарной математике. Таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики. Изд. 9-е. Выгодский М. Я. М., Гостехиздат, 1956, 412 стр., илл., 8 р. 05 к.

3683 К. Общая математика. Т. I. Дени-Папен (Mathématiques générales. T. I. 6-e éd. Denis-Papin Maurice. Paris, Dunod, 1957, XLVII, 200, LXIV p.) (франц.)

Первый том справочника по математике для физиков, инженеров и учащихся технических учебных заведений, содержащий большой справочный материал по элементарной и высшей математике. Имеется обширный предметный указатель. Приводится библиография основных книг и справочников (преимущественно французских) по элементарной и высшей математике. Основные части: алгебра, геометрия, тригонометрия прямолинейная и сферическая, анализ, понятия теории вероятностей.

Некоторые разделы содержат богатый материал (комбинаторный анализ, полиномы, специальные функции и т. п.), есть разделы слабо освещенные (дифференциальные уравнения в частных производных и т. п.). Приводятся некоторые важнейшие формулы элементарной математики, таблицы квадратов, кубов, квадратных и кубических корней, логарифмов и обратных значений чисел от 1 до 1000 и некоторые другие таблицы, а также таблицы тригонометрических функций, единиц измерений и др. М. К. Керимов

3684 К. Общая математика. Т. 2. Дени-Папен (Mathématiques générales. T. 2, 5-e éd. Denis-Papin Maurice. Paris, Dunod, 1955, XXXVII, 182, LXIV p.) (франц.)

Второй том справочника по математике (реф. 3683 К). В начале книги повторяется предметный указатель из первого тома, который относится к обоим томам. Том разбит на части: геометрия аналитическая и дифференциальная, численные и графические методы, векторное исчисление, операционное, матричное и тензорное исчисления. Подробно изложен раздел аналитической геометрии, все формулы приведены в прямоугольных и косоугольных координатах. В разделе по операционному исчислению приведена таблица соответствующих формул операционного исчисления. В конце книги приводятся таблицы функции ошибок, функций Эйлера, натуральных логарифмов, показательных и гиперболических функций, эллиптических интегралов, интегралов Френеля, функций Бесселя, полиномов Лежандра, интегрального синуса и косинуса. Повторно приводятся некоторые таблицы из первого тома.

М. К. Керимов

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3685. Вавилонская математика. Веселовский И. Н., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1955, 241—303

Автор не считает правильной идею Нёйгебауэра о возникновении в древнем Вавилоне шестидесятиричной позиционной системы счисления как следствия слияния систем мер суммерийцев и аккадян и выдвигает собственные гипотезы.

Шестидесятиричный характер вавилонского счета обусловлен, по мнению автора, техникой счета на пальцах, аналогичной приемам раннего западно-европейского средневековья, когда суставы большого и указательного пальца служат для отсчета десятков, а суставы остальных трех пальцев — для отсчета единиц.

Позиционный принцип записи чисел автор считает возникшим около 2000 г. до н. э. исключительно из требований удобства техники вычислений. При этом он вводит гипотезу о существовании шестидесятиричного абака для производства промежуточных подсчетов.

Разделяя общее мнение об алгебраичности математического мышления вавилонян, автор относит к области легенд существование у них уравнений степени выше второй. В послесловии дается характеристика статьи Леви (Levy H., J. Amer. Oriental Soc., 1949, 69, № 1) как неудачной попытки воскрешения нёйгебауэровской теории. К. А. Рыбников

3686. Диофант Александрийский. Свифт (Diophantus of Alexandria. Swift J. D.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 163—170 (англ.)

Автор, на основании анализа сочинения Диофанта, делает следующие выводы: 1) в теории уравнений Диофант по сравнению с вавилонянами и Евклидом ничего нового не внес; 2) Диофант не изобрел неопределенных уравнений и не разработал общих методов их решений; 3) наличие равенства вида $t^2 = (x^2 - m)^2$, где $x^2 - m < 0$, позволяет думать, что Диофант имел представление об отрицательных числах и знал, что квадрат отрицательного числа равен положительному числу.

Автор отмечает, что арабы, очевидно, использовали труды Диофанта, но не включили в свои книги ни одной из его задач и не воспользовались его системой обозначений. А. Е. Раик

3687. Математика и астрономия древних индийцев. Стипанич (Математика и астрономија древних Индијаца. Стипанић Ернест), Наука и природа, 1956, 9, № 3, 110—113 (сербо-хорв.)

Популярный обзор известных в истории науки сведений о развитии математики и астрономии в Индии до XI в. н. э. К. А. Рыбников

3688. «О криволинейных поверхностях» Архимеда. Средневековый комментарий Иоганна Тайнемю на 1-ю книгу «О сфере и цилиндре» Архимеда. Кладжетт (The de curvis superficiebus Archimenidis: A medieval commentary of Johannes de Tinemue on book I of the De sphaera et cylindro of Archimedes. Clagett M.), Osiris, 1954, 11, 294—346 (англ.)

Публикуется с пояснениями текст сочинения XIII в. о книге Архимеда «О сфере и цилиндре». Интересно наличие теоремы о пропорциональности окружностей и

диаметров (предл. 3), не имеющейся в сохранившихся текстах Архимеда. И. Н. Веселовский

3689. Несколько дополнительных предложений к работе Архимеда «О криволинейных поверхностях». Кладжетт (Some additional propositions of the «De curvis superficiebus Archimenidis». Clagett M.), Osiris, 1954, **11**, 347—358 (англ.)

В дополнение к предыдущей статье (реф. 3688) публикуется латинский текст находящихся в некоторых списках дополнительных предложений (поверхность сферического сегмента, объем усеченного конуса).

И. Н. Веселовский

3690. Забытый бельгийский геометр. Лоран (Un géomètre belge méconnu. Lorent H.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 1, 83—91 (франц).

Сообщение о книге «Geometria elementaria e practica», — Lovanii, e typographia Academica, MDCCL XXIV. Книга анонимна, но с надписью о том, что автром ее является профессор философии Тисбертс (Thysbaerts). И. Я. Депман

3691. Исаак Ньютон. Коэн (Isaac Newton. Cohen I. Bernard), Scient. Amer., 1955, **193**, № 6, 73—76, 78, 80 (англ.)

Краткий биографический очерк И. Ньютона. Научные заслуги Ньютона освещены слабо. Много места отведено бытовым подробностям и ненаучным увлечениям Ньютона: его интересу к алхимии, оккультной философии, религиозным вопросам. К. А. Рыбников

3692. Из истории теории вероятностей. Бирман (Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Biermann Kurt-R.), Wiss. Ann., 1956, **5**, № 6, 542—548 (нем.)

Рассматривается история задачи о разделении ставки: всю ставку получает тот из t партнеров, который выигрывает S партий. Как должна быть разделена ставка между партнерами, если игра прервана после r партий $(1 \leqslant r \leqslant t(S-1))$?

Упоминается о неудачных попытках решить эту задачу Пачиоли, Кардано, Тартальи и др., а также о правильных решениях Паскаля, Ферма и Гюйгенса и более поздних исследованиях. Разбирается решение Ферма. Библ. 20 назв. Л. Е. Майстров

3693. Ян Снядецкий. Биттнер (O Janie Śniadeckim. Bittner Ireneusz), Matematyka, 1956, **9**, № 3, 9—12 (польск.)

В статье, написанной по поводу 200-летия со дня рождения Яна Снядецкого (1756—1830), рассматривается его деятельность как математика.

3694. К биографии академика С. Е. Гурьева. Прудников В. Е., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, **10**, 384—392

Освещены только педагогические работы Гурьева, причем таким образом, что из изложения не ясно, имел ли Гурьев какие-либо оригинальные научные работы.

Б. Н. Делоне

3695. Первое математическое общество в России. Депман И. Я., Молодший В. Н., Тр. 3-го Всес. [матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 230

Тезисы доклада о «Московском обществе математиков», учрежденном в 1811 г.

3696. Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Картеси (Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792—1856). Kárteszi Ferenc), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. osz. közl., 1956, **6**, № 2, 157—161 (венг.)

Статья к столетию со дня смерти Н. И. Лобачевского. Приведены краткие биографические данные. Подчеркивается философское значение неевклидовой геометрии, опровергающей взгляды Канта о независимости аксиом геометрии от опыта. К. С. Сцилард

3697. Столетие со дня смерти Николая Ивановича Лобачевского. Балада (Sto lat od śmierci Mikołaja Łobaczewskiego. Balada Frantiszek), Matematyka, 1956, **9**, № 5, 5—16 (польск.)

3698. Николай Иванович Лобачевский. Рыбкин Г. Ф., Вопр. истории, естествозн. и техники, 1956, вып. 2, 50—60

3699. Неизвестная статья Н. И. Лобачевского по акустике. Бронштейн И. Н., Акуст. ж., 1956, **2**, № 3, 320—322

Текст статьи без подписи из «Казанского вестника» за 1823 г. «Происхождение и распространение звука в воздухе», относительно которой автор (И. Н. Бронштейн) считает, что она написана Лобачевским.

Б. Н. Делоне

3700. Е. С. Федоров и Академия наук. Шафрановский И. И., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, **10**, 28—65

Доклад, прочитанный 21 декабря 1953 г. на юбилейной сессии, посвященной 100-летию со дня рождения Е. С. Федорова (1853—1919). Содержит ценный подбор документов и писем, характеризующих связи Е. С. Федорова с Петербургской Академией наук в период 1894—1905 гг. Б. Н. Делоне

3701. Е. С. Федоров и современная кристаллография. Аншелес О. М., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, **10**, 13—18

Доклад, прочитанный 23 декабря 1953 г. на юбилейной сессии, посвященной 100-летию со дня рождения Е. С. Федорова (1853—1919).

3702. К истории развития функционального анализа на Украине. Шилов Г. Е., В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 427—476

Описание важнейших достижений украинских ученых по функциональному анализу за период с 1947 по 1954 г. и связи их с работами математиков московской и ленинградской школ функционального анализа.

Статья состоит из следующих разделов: 1. Инвариантное интегрирование на компакте с группой преобразований. 2. Геометрия выпуклых тел в пространстве Банаха. 3. Спектральная теория линейных операторов (абстрактных и дифференциальных) и ее связь с классическими исследованиями П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. 4. Гармонический анализ на компакте с группой преобразований. 5. Прямая задача Штурма—Лиувилля. 6. Обратная задача Штурма—Лиувилля. 7. Приведение несамосопряженных операторов к треугольному виду. 8. Теория сходимости сингулярных интегралов. 9. Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом. 10. Работы по нелинейному анализу. 11. Нормированные кольца. 12. Обобщенные функции. 13. Отдельные работы по геометрии банаховых пространств, по приближенным методам и по применению методов функционального анализа к исследованию дифференциальных уравнений.

Приведена библиография (198 названий).

М. А. Красносельский

3703. Краткий обзор развития теории дифференциальных уравнений с частными производными. Жаутыков О. А., Вестн. АН КазССР, 1955, № 7, 4—19

Краткий обзор некоторых результатов ряда советских математиков.

Примечания референта. 1. Замечание автора, что статья написана «к 220-летию со дня появления теории уравнений с частными производными», неудачно. Не указывается ни названия, ни содержания «первой работы по уравнениям с частными производными» Л. Эйлера, 220-летие которой отмечается. В действительности, постановка теоретических вопросов в этой области анализа возникла позже, в середине

XVIII столетия в работах Даламбера и Эйлера, связанных с изучением колебаний струн и решением важнейших задач гидродинамики.

2. Статья не содержит характеристики основных этапов 200-летнего развития теории уравнений с частными производными. При освещении же современного состояния теории автор фактически ограничился известными обзорными статьями И. Г. Петровского (Успехи матем. наук, 1937, **3**, 234—238; 1943, **1**, № 13—14, 44—70) и С. Л. Соболева (Математика в СССР за 30 лет, М.—Л., 1948, 518—545), опустив результаты зарубежных ученых, указанные в этих статьях. Н. И. Симонов

3704. Чествование академика Г. К. Моисила (Sărbătorirea acad. Gr. C. Moisil), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A8**, № 4, 216—217 (рум.)

К пятидесятилетию румынского математика акад. Г. К. Моисила, президента Румынского научного физико-математического общества.

3705. Иосиф Иванович Сомов. К р а м а р Ф. Д., Вестн. высш. школы, 1956, № 6, 55—59

Очерк научно-педагогической и общественной деятельности академика Сомова И. И. (1815—1876), профессора Петербургского университета.

К. А. Рыбников

3706. Фредерик Рисс (Frédéric Riesz. 1880—1956), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 1, 1—3 (франц.)

28 февраля 1956 г. умер известный венгерский математик Ф. Рисс — один из основоположников функционального анализа.

3707. Эмиль Борель (Некролог). П е р е с (Emile Borel (Nécrologie). P é r è s J.), Ann. Univ. Paris, 1956, **26**, № 2, 213—217 (франц.)

3708. Эмиль Борель. М о н т е л ь (Emile Borel (1871—1956). M o n t e l P a u l), Rev. gén. sci. pures et appl., 1956, **63**, № 5—6, 137—141 (франц.)

3709. Эмиль Борель (1871—1956). Некролог. Д а р м у а (Emile Borel (1871—1956). Nécrologe. D a r m o i s G e o r g e s), J. Soc. statist. Paris, 1956, **97**, № 1—3, 21—24 (франц.)

3710. Алан Матисон Тьюринг (1912—1954). Т а у с к и (Alan Mathison Turing (1912—1954). T a u s s k y O l g a), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, **10**, № 55, 180—181 (англ.)

Заметка о жизни и научных работах А. М. Тьюринга, скончавшегося 7 июня 1954 г. Его математические сочинения посвящены главным образом математической логике. Автор использовал материалы, содержащиеся в более подробной статье Ньюмана (РЖМат, 1957, 1076). К. А. Рыбников

3711. Памяти Вильгельма Лорея. Б е н к е (Wilhelm Lorey zum Gedächtnis. B e h n k e H e i n r i c h), Math.-phys. Semesterber., 1956, **5**, № 1—2, 1—3 (нем.)

Некролог почетного профессора франкфуртского на Майне университета В. Лорея, скончавшегося 3 июля 1955 г. на 83-м году жизни. Основные работы Лорея посвящены истории математики в Германии и методическим вопросам. К. А. Рыбников

3712 К. Геометрия в египетском искусстве. Ч ь е л л а н д (Geometry in Egyptian art. K i e l l a n d E l s e C h r i s t i e. London, Tiranti, 1955, X, 214 pp., ill., 30 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 289, 14 (англ.)

3713 К. Комплексные числа и теорема Муавра. Ш и н д е л а р ж (Komplexní čísla a Moivreova veta. Š i n d e l á ř K a r e l Praha, Nakladatelstvi ČSAN, 1955, 220) (чеш.)

Изложение элементов теории комплексных чисел, доказательства теоремы Муавра и некоторых ее приложений. В книгу включены задачи (всего 240), ответы к ним и исторические заметки. Книга предназначается для учащихся старших классов средней школы и для самообразования. J. Vyšín

3714 Д. Научное наследие академика Н. Я. Сонина. К р о п о т о в А. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1956.

См. также: 3721, 3722 **К**, 3771, 3773, 3903, 4038, 4086, 4105 **К**, 4197, 4254, 4257, 4289 **К**; 4298, 4307 **К**, 4443, 4445, 4461, 4479.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3715. Об ω-непротиворечивости и связанных с ней свойствах. О р и (On ω-consistency and related properties. O r e y S t e v e n), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 3, 246—252 (англ.)

Статья примыкает к исследованию Куайна (РЖМат, 1954, 4326) (который высказал мысль, что ω-противоречивость системы означает лишь недостаток принятого в этой системе определения понятия натурального числа — благодаря чему свойством, принятым за определение натурального числа, обладают также некоторые объекты, не являющиеся натуральными числами), а также к работам Хенкина о полноте узкого исчисления предикатов и теории типов (J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 159—166; 1950, **15**, 81—91) и о Г-непротиворечивости (РЖМат, 1955, 1073). Рассматриваются системы $\mathscr{L}$ такого вида, для которых Хенкиным (J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 81—91) доказана теорема о полноте, и термин «модель» понимается в том же смысле, как в этой работе Хенкина (так что допускаются нестандартные модели). К системам $\mathscr{L}$ относится, в частности, всякая классическая теория типов.

В классе систем $\mathscr{L}$ выделяется подкласс $\mathscr{L}_N$ систем L таких, что в L содержится множество термов $z_1, z_2, \ldots$ без свободных переменных, одного и того же типа, и формула $N(x)$ с единственной свободной переменной x, причем $\vdash N(z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и, кроме того, в L содержится формула $x = y$, в которой x и y являются единственными свободными переменными и для которой доказуемы обычные аксиомы равенства.

Специальной моделью системы L из $\mathscr{L}_N$ называется такая модель, в которой $N(x)$ удовлетворяется образами натуральных чисел и никакими другими объектами.

Устанавливается ряд дедуктивных свойств системы L из $\mathscr{L}_N$, равносильных существованию специальной модели. Из этих свойств вытекает ω-непротиворечивость L. Показывается, что существует ω-непротиворечивая L, не обладающая специальной моделью.

Система L из $\mathscr{L}_N$ называется ω (α)-непротиворечивой, если она сохраняет непротиворечивость при

α-кратных применениях правила Карнапа. Доказывается, что для L из $\mathscr{L}_N$ существование специальной модели равносильно ω (Ω)-непротиворечивости.

А. С. Есенин-Вольпин

3716. Замечание по поводу проблемы П. Бернайса. **Собощинский** (Note on a problem of Paul Bernays. Sobociński Bolesław), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 109—114 (англ.)

П. Бернайсом была поставлена задача: каково минимальное число n, для которого существует формализация исчисления высказываний с единственными правилами вывода — правилом подстановки и modus ponens и содержащая в каждой аксиоме не более n вхождений букв переменных.

В работе устанавливается, что $n=5$ для случая, когда базисными функциями являются «C» (импликация) и «N» (отрицание). Для доказательства автор строит аксиоматику, в которой выводимы все истинные формулы исчисления высказываний, содержащие не более 4 вхождений букв переменных, и с помощью надлежащей интерпретации показывает, что существует истинная формула исчисления высказываний, не выводимая из этой системы аксиом. С другой стороны, приводятся две аксиоматики исчисления высказываний, в которых каждая из аксиом имеет не более 5 вхождений букв переменных.

В заключение производится сопоставление этого результата с результатом Яськовского (Jaskowski S., Studia Soc. scient. torunensis, 1948, A1, № 1, 1—15).

С. В. Яблонский

3717. Изучение некоторых операторов в классах отношений, определяемых с помощью ограниченных изоморфизмов. **Фраиссе** (Étude de certains opérateurs dans les classes de relations, définis à partir d'isomorphismes restreints. Fraïssé Roland), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 2, 59—75 (франц.)

Применение γ-операторов в узком исчислении предикатов. **Фраиссе** (Application des γ-opérateurs au calcul logique du premier échelon. Fraïssé Roland), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 2, 76—92 (франц.)

Ограниченным изоморфизмом (о. и.) m-отношений R и S (с базами D и E) называется изоморфизм их ограничений. Автор ввел (Alger-Mathématiques, 1955, 2, № 1, 15—60; № 2) понятие γ-изоморфизма о. и. $\left(\gamma=\begin{Bmatrix}n\\p\end{Bmatrix}\right.$, n, p — целые $\geqslant 0$), там же рассматриваются эквивалентности $\gamma\begin{pmatrix}n\\p\end{pmatrix}$, $\overset{n}{\sim}$, $\overset{\omega}{\sim}$ для отношений. В первой из реферируемых статей автор вводит понятие оператора: если каждому m-отношению R сопоставляется m'-отношение $\mathscr{P}R$ с той же базой, то $\mathscr{P}$ называется оператором рода $(m\to m')$. $\mathscr{P}$ называется γ-оператором, если всякий γ-изоморфизм m-отношений R и S является о. и. $\mathscr{P}R$ и $\mathscr{P}S$.

Для изучения отношений и операторов привлекаются функции истинности двузначной логики (в обозначениях автора (+, −)-функции). Среди 0-операторов выделяются некоторые, называемые простыми. Для m-отношений определяются проекторы A_m^r и $\mathcal{E}_m^r$. Именно, $S=A_mR$ и $T=\mathcal{E}_mR$ означает, что $S(x_1,\ldots,x_{m-1})=+$, когда $R(x_1,\ldots,x_{m-1},y)=+$ при любом y и $T(x_1,\ldots,x_{m-1})=+$, когда $R(x_1,\ldots,x_{m-1},y)=+$ для некоторого y. Тогда $A_m^r=A_{m-r+1}\ldots A_m$ и $\mathcal{E}_m^r=\mathcal{E}_{m-r+1}\ldots\mathcal{E}_m$.

Наконец, с помощью простых операторов, проекторов и функций (+, −) автор определяет γ-конструкцию.

Основные результаты: 1) Для того чтобы оператор $\mathscr{P}$ рода $(m\to m')$ был γ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы класс $\sum^1$-отношений $(R;\ a_1,\ldots,a_m)$ таких, что $(\mathscr{P}R)(a_1,\ldots,a_{m'})=+$, был объединением классов, определенных γ-изоморфизмом ($\sum$-отношением называется система $(X;\ x_1,\ldots,x_q)$, где X — отношение и $x_1,\ldots,x_q$ — элементы базы). 2) Последние члены γ-конструкций и только они суть γ-операторы. Аналогичны результаты и для m-отношений.

Во второй статье изучается связь между формулами узкого исчисления предикатов и γ-операторами. Вводится символика: кроме индивидуальных и предикатных переменных, знаки логических связок «не», «или», «и» ($^-$, $\bigcup$, $\bigcap$), кванторов V и Э, равенства $=$, тавтологии $\bar{\omega}$. Все формулы получаются из простых: $x=y$, $X(x,y,\ldots)$ и $\bar{\omega}$.

Видимая (apparent) степень (в. с.) формулы Φ: если Φ не содержит связанных индивидуальных и предикатных переменных, то в. с. Φ есть 0; в. с. $\bar{\Phi}$ = в. с. Φ; в. с. $\Phi\bigcup\Phi'$ = max в. с. Φ и Φ′; то же и для $\bigcap$; при переходе от Φ к $\forall\xi\Phi$ в. с. не меняется, если Φ вида $\forall\eta\Psi$ (ξ, η — индивидуальные или предикатные переменные), в противном случае возрастает на 1; то же и для Э.

Далее рассматриваются лишь формулы узкого исчисления, содержащие не более одного предиката. Индивидуальные переменные x_α, $x_\beta,\ldots$, (α, $\beta,\ldots$ — целые >0); μ_Φ — наибольший номер свободного переменного в Φ, $s=(m;\ \alpha,\ \beta,\ldots)$ — сигнатура Φ (m — число мест предиката; α, $\beta,\ldots$ — номера свободных переменных).

Характеристикой Φ называется $\gamma=\begin{Bmatrix}n\\p\end{Bmatrix}$, где n есть в. с. Φ, p — число свободных переменных в Φ.

Для $\sum$-отношения $\sigma=(R;\ a_\alpha,\ a_\beta,\ldots)$ сигнатуры S формула Φ определяет значение $\Phi(\sigma)$: + или −.

Теперь с каждой формулой Φ связывается оператор $\prod_\Phi^{mm'}$: если $m'\geqslant\mu_\Phi$, то по определению

$$R'(a_1,\ldots,a_{m'})=\Phi(R;\ a_1,\ldots,a_{m'})\text{ и }\prod_\Phi^{m,m'}R=R'.$$

Основной результат: Для того чтобы оператор $\mathscr{P}$ рода $(m\to m')$ был γ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовала формула Φ характеристики $\gamma'\leqslant\gamma$ такая, что $\mathscr{P}=\prod_\Phi^{m,m'}$ ($\gamma'\leqslant\gamma$ означает, что $n'\leqslant n$ и $p'\leqslant p$). В последнем параграфе статьи автор дает истолкование $\overset{n}{\sim}$, $\overset{\omega}{\sim}$, а именно: $R\overset{n}{\sim}S$, RnS, $R\overset{\omega}{\sim}S$ означает соответственно, что R и S удовлетворяют одним и тем же формулам: характеристики $\gamma'\leqslant\gamma$, видимой степени не выше n, узкого исчисления предикатов. Наконец, пользуясь указанным истолкованием, автор формулирует ряд результатов, полученных им ранее, среди которых теоремы Лёвенгейма—Сколема, Хенкина, Мальцева, Бета, Мостовского, Тарского.

Д. А. Захаров

3718. Относительно проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений. **Цейтин Г. С.**, Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 2, 209—212

Заметка содержит максимальное усиление одной теоремы А. А. Маркова (РЖМат, 1956, 2716).

Ассоциативное исчисление (а. и.) задается определяющей системой соотношений вида $T\longleftrightarrow U$, где T и U — «слова» в некотором алфавите А, и определяется как разрешение подставлять в любое слово (в А) U вместо T или наоборот. Слова P и Q, получаемые одно из другого рядом таких действий в а. и.

$\mathfrak{A}$, называются эквивалентными (запись: $\mathfrak{A}: P \underline{\underline{\parallel}} Q$). Результат написания слов P и Q подряд обозначается через PQ. Говорится, что а. и. $\mathfrak{A}$ включаемо в а. и. $\mathfrak{B}$, если существует такой нормальный алгорифм (н. а.) (РЖМат, 1956, 2716) $\mathfrak{C}$, что выполняются требования: Г1. $\mathfrak{C}$ перерабатывает каждое слово в алфавите а. и. $\mathfrak{A}$ в некоторое слово в алфавите а. и. $\mathfrak{B}$; Г2. Если $\mathfrak{A}: P \underline{\underline{\parallel}} Q$, то $\mathfrak{B}: \mathfrak{C}(P) \underline{\underline{\parallel}} \mathfrak{C}(Q)$; Г3. $\mathfrak{B}: \mathfrak{C}(PQ) \underline{\underline{\parallel}} \underline{\underline{\parallel}} \mathfrak{C}(P)\mathfrak{C}(Q)$; Г4. Если $\mathfrak{B}: \mathfrak{C}(P) \underline{\underline{\parallel}} \mathfrak{C}(Q)$, то $\mathfrak{A}: P \underline{\underline{\parallel}} Q$. А. и. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются изоморфными, если, кроме Г1—Г4, выполняется также Г5: Существует н. а. $\mathfrak{G}$ такой, что $\mathfrak{B}: \mathfrak{C}(\mathfrak{G}(Q)) \underline{\underline{\parallel}} Q$. Некоторое свойство И а. и. называется инвариантным, если всякое а. и., изоморфное а. и. со свойством И, само обладает им. Решением проблемы распознавания свойства И для алфавита А называется построение такого н. а., который перерабатывает определяющую систему данного а. и. в А в пустое слово тогда и только тогда, когда а. и. обладает свойством И.

Доказывается теорема 1: Если И — инвариантное свойство а. и. такое, что существует а. и., не включаемое ни в какое а. и. со свойством И, и что существует а. и. в p-буквенном ($p \geqslant 0$) алфавите, обладающее свойством И, то для всякого алфавита, содержащего не менее $p+2$ букв, проблема распознавания свойства И неразрешима.

В работе А. А. Маркова вместо $p+2$ имеется $p+4$. Дальнейшее уменьшение количества букв невозможно.

Теорема 2. Для всякого целого неотрицательного p существует инвариантное свойство а. и. $И_p$ такое, что существует а. и., не включаемое ни в какое а. и. со свойством $И_p$, и существует а. и. в p-буквенном алфавите, обладающее свойством $И_p$, однако для всякого алфавита, содержащего не более $p+1$ буквы, проблема распознавания свойства $И_p$ разрешима. В. К. Детловс

3719. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности. Цейтин Г. С., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 3, 370—371

Заметка примыкает к работе А. А. Маркова (РЖМат, 1956, 2716), в которой построено ассоциативное исчисление (а. и.) $\mathfrak{C}_1$ с неразрешимой проблемой эквивалентности в том смысле, что не существует нормального алгорифма, перерабатывающего пару слов $P * Q$ в пустое слово тогда и только тогда, когда слова P и Q эквивалентны в а. и. $\mathfrak{C}_1$ (соответствующие определения см. РЖМат, 1956, 2716). Это а. и. построено в алфавите из 13 букв и имеет 33 определяющих соотношения. Добавлением еще 4 соотношений строится а. и. $\mathfrak{C}_2$, в котором неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.

Автор строит в алфавите из 5 букв более простые а. и. $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$ с 7 и 9 определяющими соотношениями, для которых тоже неразрешимы проблемы эквивалентности и эквивалентности фиксированному слову соответственно.

Доказательства только намечаются. Проблема эквивалентности для $\mathfrak{C}$ равносильна проблеме эквивалентности для а. и. «специального вида» (так называется а. и. с пустыми правыми частями определяющих соотношений). Но эта проблема неразрешима для того а. и. специального вида, которое совпадает с построенной П. С. Новиковым (РЖМат, 1956, 112) группой с неразрешимой проблемой тождества.

В. К. Детловс

3720. Некоторые специфические примеры в булевой алгебре (I). Симпуку, Киносита (Some specific examples in Boolean algebra (I). Shimpuku Eiguma, Kinoshita Takuma), 鹿兒島大學教育學部研究紀要, Кагосима дайгаку кёикугакубу кэнкю киё, Bull. Educ. Res. Inst. Fac. Educ. Univ. Kagoshima, 1955, **7**, 111—114 (англ.)

Излагается известная связь теорем исчисления высказываний с булевыми алгебрами, а именно некоторые логические тавтологии доказываются в булевых алгебрах. Приведенные примеры мало понятны.

С. В. Яблонский

3721. Положение «метаматематики». Хоф (Die Situation der «Metamathematik». Hof W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, **9**, № 4, 154—156 (нем.)

Автор весьма схематически прослеживает развитие тех идей, и прежде всего идей аксиоматики, которые привели в итоге к идее метаматематики в том виде, как она формулируется у Гильберта. С этой точки зрения все развитие математики им делится на три основных этапа: 1) античная генетика, 2) классическая аксиоматика, 3) современная поливалентность.

А. Л. Субботин

3722 К. Основания логики и математики. Зейслер (Foundations of logic and mathematics. Part I. Zeisler Ernest Bloomfield. Chicago, A. J. Isaacs., 1955, 230 pp., 8. 50 doll.), Cumul. Book Index, 1956, **59**, № 1, 117 (англ.)

3723 Д. Бимодальная логика и дважды замкнутые алгебры. Рубин (Bi-modal logic and double-closure algebras. Rubin Jean E. — Doct. diss., Stanford Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 426—427 (англ.)

3724 Д. О некоторых классификациях систем отношений. Фраиссе (Sur quelques classifications des systèmes de relations. Fraissé Roland. — Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1953. Chartres, Impr. Durand, 1955, 154 p.) (франц.)

См. также: 3710, 3905, 3906.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3725. Показательная тригонометрическая сумма. Постников А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 9—10

Тезисы доклада.

3726. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Постников А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 8—9

Резюме доклада. См. также РЖМат, 1957, 2005.

3727. О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах. Коробов Н. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 5, 649—660

Функция $\varphi(x)$ называется вполне равномерно распределенной, если при любом $s \geqslant 1$ и любых целых $m_1, \ldots, m_s$ $(m_1^2 + \ldots + m_s^2 \neq 0)$ дробные доли функции $m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s)$ равномерно

распределены. Ранее автор (Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, 14, 215—238) построил примеры вполне равномерно распределенных функций и показал, каким образом с помощью их можно для любого фиксированного целого $q \geqslant 2$ строить числа α такие, что дробные доли $\{\alpha q^x\}$ равномерно распределены. В настоящей работе дается новый и более простой способ построения вполне равномерно распределенных функций $\varphi(x)$, причем для этих функций тригонометрические суммы $\sum_{x=1}^{P} \exp(2\pi i \varphi(x))$ оцениваются лучше, чем для тех функций, которые были построены автором раньше. Далее показывается, как с помощью вполне равномерно распределенных функций строить совместно нормальные числа, т. е. для любых целых $q_1, \ldots, q_s$ ($q_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, s$) подобрать числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ так, что система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ вполне равномерно распределена в s-мерном пространстве.

А. Г. Постников

3728. Операторные методы в теории чисел. Романов Н. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 13

Тезисы доклада. Применение операторных методов в теории чисел позволяет легко и удобно доказывать различные арифметические тождества. Освещаются работы Л. Г. Шнирельмана и автора по операторным рядам Дирихле и связи между некоторыми вопросами теории чисел и функционального анализа.

И. П. Кубилюс

3729. Классификация характеров числовых полугрупп. Чудаков Н. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 15

Тезисы доклада. Излагаются результаты 1950—1955 гг. Н. Г. Чудакова, Ю. В. Линника, Б. М. Бредихина, Б. С. Бронштейна.

3730. К теории ультрапоказательной функции Г. Ф. Вороного. Попов А. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 8

Тезисы доклада. Г. Ф. Вороной ввел впервые в теорию чисел функцию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma^m(s) x^{-s} ds, \qquad (1)$$

где m — натуральное, $x > 0$, $c > 0$, $R(s) > 0$, названную им ультрапоказательной функцией m-го ранга. Теорию функции (1) и ей подобных можно построить, исходя из соответствующего дифференциального уравнения. Отмечается значение ультрапоказательной функции в изучении сумм $\Sigma_{n \leqslant x} \tau_m(n)$, где $\tau_m(n)$ — число представлений n в виде m сомножителей, а также при изучении распределения простых чисел.

И. П. Кубилюс

3731. Оценка числа иррегулярных L-функций квадратичного поля. Маринина С. Ф., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 319—324

Полное доказательство теоремы, реферат которой был дан ранее (РЖМат, 1956, 7850). Н. Г. Чудаков

3732. О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел. I. Ломадзе Г. А., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1956, 22, 77—102

Число $t_m(x) = (m/2 - 1)x^2 - (m/2 - 2)x$ называется обобщенным m-гональным числом при целых x и m (в частном случае $m = 5$ — пентагональные числа). Пусть $r_s(n)$ обозначает число представлений n суммами s обобщенных m-гональных чисел и ϑ_{gh} — обобщенная тэта-функция. $\Theta_s(\tau)$ обозначает сингулярный ряд, связанный с $r_s(n)$.

Дается достаточное условие справедливости следующего тождества

$$\vartheta_{00}^s(\tau; -1,6) = \Theta_s(\tau) + \sum_{t=1}^{\lambda} A_s^{(t)} \vartheta_{00}^{s-4t}(\tau; -1,6)\vartheta_{01}^{4t}(\tau; -1,6) + \sum_{t=1}^{l} B_s^{(t)} \vartheta_{00}^{s-24t}(\tau; -1,6)\vartheta_{20}^{12t}(\tau; -1,6)\vartheta_{11}^{12t}(\tau; -1,6), \qquad (1)$$

где $\lambda = [(s-1)/3]$, $l = [(s-1)/24]$, $A_s^{(t)}$ и $B_s^{(t)}$ — постоянные.

Это тождество при $s = 3$ было доказано Штрефкерком (Streefkerk H., Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking $U = \sum_{i=1}^{s}(Ax_i^2 + Bx_i + C)$, Amsterdam, 1943); в этом случае суммы по t справа отсутствуют.

Доказано, что приведенное достаточное условие для выполнения тождества (1) соблюдено в случае $s = 4, 5, 6$ и 7. А. П. Лурсманашвили

3733. О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел. Ломадзе Г. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 7

Продолжение работы автора (реф. 3732). Доказываются те же тождества, что в указанной выше работе, только для восьмиугольных чисел.

А. П. Лурсманашвили

3734. О целых точках на эллипсоидах. Малышев А. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 19, 18—34

Рассматривается вопрос о представлении чисел тернарными квадратичными формами. Основным результатом является теорема:

Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная целочисленная собственно примитивная квадратичная форма инвариантов $[r, 1]$ (r — нечетное), принадлежащая роду $\Gamma_{[r,1]}$ с характерами $(-f/p) = 1$ для всех простых $p \mid r$; g — нечетное число с условием $rg \neq 1$; Λ_λ — круговая коническая область с вершиной в начале координат и телесным углом $\lambda > 0$. Рассмотрим целое число m, взаимно простое с rg, и целые числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие следующим условиям:

$$f(x_0, y_0, z_0) \equiv m \pmod{8rg},\ \text{о. н. д.}\ (x_0, y_0, z_0, 2) = 1,$$

$$(-m/q) = 1$$

для всех простых $q \mid g$. Обозначим через $\Pi_{f,m}$ эллипсоид $f(x, y, z) = m$, а через $t(\Pi_{f,m} \cap \Lambda_\lambda; x_0, y_0, z_0, g)$ — количество целых точек (x, y, z) эллипсоида $\Pi_{f,m}$, лежащих в конусе Λ_λ, и сравнимых с $(x_0, y_0, z_0) \bmod g$. Тогда найдутся такие постоянные $\varkappa > 0$, $\varkappa' > 0$ и m_0, зависящие только от f, g и λ, что для $m > m_0$

$$\varkappa h(-m) \leqslant t(\Pi_{f,m} \cap \Lambda_\lambda; x_0, y_0, z_0, g) \leqslant \varkappa' h(-m), \qquad (1)$$

где $h(-m)$ есть количество классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m.

Доказательство базируется на арифметике кватернионов.

Также формулируются важнейшие частные случаи этой теоремы, некоторые из которых получены ранее (Линник Ю. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, 363—402; Малышев А. В., Докл. АН СССР, 1952, 87, 175—178; РЖМат, 1953, 39, 44).

Из (1) выводится аналогичная оценка для количества всех целых точек эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащих в конусе Λ_λ. Г. А. Ломадзе

3735. К теории операторов для модулярных форм n-й степени. Кёхер (Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades. Koecher Max), Math. Ann., 1956, 130, № 5, 351—385 (нем.)

В теории модулярных форм от одного комплексного переменного важное значение имеет теория операторов Гекке. В реферируемой работе дается обобщение этой теории для модулярных форм n-й степени.

Группой единиц кососимметрической матрицы R называется совокупность всех целочисленных матриц A, для которых $A'RA = R$. Как известно, матрицу R можно привести к следующему нормальному виду:

$$R_H = \begin{pmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{pmatrix},$$

где H — диагональная матрица. Группу единиц матрицы R_H обозначим через $M_0(H)$. Пусть $M(H) = BM_0(H)B^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ — подгруппа симплектической группы, подобная $M_0(H)$. Совокупность автоморфных форм веса k относительно группы $M(H)$ обозначим через $\{M(H), k\}$. Автор вводит операторы $T(H, HK)$, отображающие $\{M(H), k\}$ в $\{M(HK), k\}$. Конструкция этих операторов аналогична конструкции операторов Гекке $T(g)$. Кроме того, определяется оператор $V(H, HG^2)$

$$f(Z) \to f(GZ)\,|\,G\,|^{-k}.$$

Этот оператор отображает $\{M(H), k\}$ в $\{M(HG^2), k\}$. Чтобы сформулировать свои результаты в форме, наиболее близкой к формулировкам Гекке и Петерсона, автор вводит бесконечномерное пространство $F_n(k)$, являющееся прямой суммой конечномерных пространств, $\{M(H), k\}$. В этом пространстве определяются операторы

$$\{f\}/T(G) = \{\delta(HG^{-1})\, f(Z;\ HG^{-1})/T(HG^{-1},\ H)\},$$
$$\{f\}/V(G) = \{\delta(HG^{-2})\, f(Z;\ HG^{-2})/V(H,\ HG^{-2})\},$$

$\delta(U) = 1$, если U — целочисленная матрица и равна нулю, если U — нецелочисленная матрица. Устанавливаются некоторые свойства этих операторов. Однако изучение кольца операторов, порожденного $T(H)$ и $V(H)$, очень сложно, поэтому автор выделяет подкольцо, для которого ему удается установить результаты, вполне аналогичные результатам Гекке. Автор называет матрицу G простой, если все ее диагональные элементы, кроме последнего, равны единице. Через P_n обозначим кольцо операторов, порожденное $T(G)$ и $V(G)$, где G пробегает все простые матрицы. В статье доказывается: 1) P_n коммутативно, 2) P_n порождается операторами $T(G)$ и $V(G)$, где G пробегает все простые матрицы, последний элемент которых простое число, 3) для любых двух простых матриц G_1 и G_2

$$T(G_1)\,T(G_2) = \sum T\left(\frac{G_1G_2}{D^2}\right) V(D),$$

где D пробегает все простые матрицы, для которых матрицы $D^{-1}G_1$ и $D^{-1}G_2$ целочисленны.

В пространстве $S_n(k)$ можно выделить инвариантное относительно всех введенных операторов подпространство, являющееся гильбертовым пространством. В этом пространстве вводится оператор

$$T_s = \sum_G |\,G\,|^{-s} T(G), \qquad (1)$$

где G — пробегает все простые матрицы, а s — комплексное переменное. Доказывается, что: 1) ряд (1) сходится абсолютно в области $\mathrm{Re}\, s > 3/2$, 2) в области сходимости

$$T_s = \prod_P (1 - |\,P\,|^{-s} T(P) + |\,P\,|^{-2s} V(P))^{-1},$$

где P пробегает все простые матрицы. Последний результат вполне аналогичен результату Гекке в формулировке Петерсона. И. Р. Шафаревич

3736. О ранге пространства регулярных в вершинах фундаментальной области модулярных форм, принадлежащих к гильбертовой модулярной группе. Герман (Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen. Herrmann Oskar), Math. Z., 1956, 64, № 4, 457—466 (нем.)

С помощью оценок коэффициентов Фурье для рядов Пуанкаре дается оценка для размерности пространства модулярных форм относительно группы Гильберта и аналогичных ей групп, введенных ранее автором (каждая из этих групп взаимно однозначно связана с некоторым классом идеалов; РЖМат, 1956, 978).

Пусть k — натуральное число > 2 и d — дискриминант вещественного квадратичного числового поля. За исключением конечного числа пар d, k, для каждой из модулярных групп, принадлежащих к классам идеалов поля $R(\sqrt{d})$, существует по крайней мере одна регулярная в вершинах фундаментальной области модулярная форма веса k, отличная от тождественного нуля. Для гильбертовой модулярной группы указываются все возможные исключительные пары. Далее дается оценка для ранга $r(d, -k; \Gamma)$ пространства регулярных в вершинах фундаментальной области модулярных форм веса $k \geqslant 3$, принадлежащих к какой-нибудь модулярной группе Γ.

Оказывается, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r(d, -k; \Gamma)}{k^2} \geqslant \frac{\Re\,|\sqrt{d}\,|}{2\pi^2 e^2},$$

где $\Re$ — регулятор поля $R(\sqrt{d})$. Для гильбертовой модулярной группы указывается следующая оценка, справедливая при любом k:

$$r(d, -k) \geqslant \frac{k\sqrt{d}}{2\pi e \varphi(k)} - 1,$$

где $\varphi(k) \geqslant \left(\frac{2\pi^4 e}{9}\sqrt{k+1}\right)^{1/(2k-1)}$

И. И. Пятецкий-Шапиро

3737. Исправление к работе «О представимости модулярных форм с помощью тэта-рядов». Эйхлер (Berichtigung zu der Arbeit «Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen». Eichler Martin), J. reine und angew. Math., 1956, 196, № 3—4, 155 (англ.)

Вносится исправление в вывод формулы для числа конечных точек совпадения, приведенной в § 2 на стр. 161 (РЖМат, 1956, 5693). Г. А. Ломадзе

3738. Об одном специальном классе дифференциальных операторов, связанном с теорией модулярных функций и теорией чисел. Левин Б. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 6—7

Утверждается, что оператор

$$A_{\rho,k,l}(f(\tau),\ \varphi(\tau)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\rho} (-1)^n c_\rho^n \frac{(k+\rho-1)\cdot\ldots\cdot(k+\rho-n)}{l(l+1)\cdot\ldots\cdot(l+n-1)} \frac{d^n\varphi(\tau)}{d\tau^n} \times$$

$$\times \frac{d^{2\rho-n} f(\tau)}{d\tau^{2\rho-n}}$$

преобразует модулярные функции $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, соответственно типов $\{-k, N, \varepsilon\}$ и $\{-l, N, \varepsilon\}$, в модулярную функцию типа $\{-(2\rho+l+k), N, \varepsilon\}$.

С помощью этого факта и теоремы Римана—Роха о линейно-независимых модулярных функциях получаются интересные теоретико-числовые результаты (вывод формул для числа представлений суммами четного числа квадратов, ряд сравнений для функции $\tau(n)$ (Рамануджана). Доказательств нет.

Г. А. Ломадзе

3739. Примечание к моей заметке о совершенных числах. Хорнфек (Bemerkung zu meiner Note über vollkommene Zahlen. Hornfeck Bernhard), Arch. Math., 1956, **7**, № 4, 273 (нем.)

Приводится примечание к статье автора (РЖМат, 1956, 4285): улучшена верхняя оценка плотности числа совершенных чисел. Получено

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{V(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

где $V(x)$ — число совершенных чисел $< x$.

В. А. Голубев

3740. О некоторых новых теоремах в теории диофантовых приближений. Шош, Туран (On some new theorems in the theory of diophantine approximations. Sós Vera T., Turán P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3—4, 241—255 (англ.; рез. русск.)

П. Туран (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Budapest, 1953) дает некоторые приложения следующей теоремы, связанной с оценкой степенных сумм. Если

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_n|,$$

m — неотрицательное целое число и b_j — любые комплексные числа, то существует целое ν такое, что

$$m+1 \leqslant \nu \leqslant m+n$$

и

$$|b_1 z_1^\nu + \ldots + b_n z_n^\nu| \geqslant |z_1|^\nu \left(\frac{n}{24e^2(m+2n)}\right)^n \times \min_{1\leqslant j\leqslant n} |b_1 + \ldots + b_j|.$$

Работа трактует (помимо возможности замены $m+2n$ на $m+n$) о возможности уменьшения числового множителя в специальном случае: $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Доказывается, что обозначая через A_1 «минимальные» возможные значения числового множителя, имеем

$$1{,}321 < A_1 < 2e^{1+4/e} < 24.$$

При доказательстве оценки сверху не используется теорема Картана, а заменяется леммой типа Чебышева. С другой стороны, нижняя оценка доказывается с помощью элементарного примера. T. Kóvári

3741. Асимметрическое приближение иррациональных чисел при помощи рациональных чисел. Геометрическая интерпретация. Негоеску (Aproximarea asimetrică a numerelor iraţionale prin raţionale. Interpretarea geometrică. Negoescu Nicolae), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1955, **1**, № 1—2, 21—30 (рум.; рез. русск., франц.)

Требуется для иррационального числа θ отыскать максимальное значение $\xi = M(\theta;\ \tau)$ так, чтобы существовало бесконечное множество рациональных дробей p/q, удовлетворяющих асимметрическим неравенствам

$$-1/\xi q^2 < p/q - \theta < \tau/\xi q^2, \quad \tau > 0.$$

Пусть τOM — система прямоугольных координат на плоскости; при фиксированном θ и переменном τ уравнение $M = M(\theta;\ \tau)$ представляет непрерывную кривую с определенной угловой точкой.

Изменяя θ так, чтобы оно пробегало множество иррациональных чисел, мы получим множество угловых точек $\mathfrak{M}$, которое и изучается. В. А. Голубев

3742. О некотором арифметическом методе в проблеме асимметрических приближений. Негоеску (O metodă aritmetică in problema aproximarilor asimetrice. Negoescu Nicolae), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1955, **1**, № 1—2, 31—38 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается теорема: Если $n < m < l$, $m-n$ и $l-m$ — натуральные нечетные числа, то хотя бы одна из тройки подходящих дробей p_n/q_n, p_m/q_m, p_l/q_l иррационального числа θ удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{1}{\xi q^2} < \frac{p}{q} - \theta < \frac{\tau}{\xi q^2}, \quad \tau > 0,$$

где

$$\xi = \left[\left(\frac{\tau^{\varepsilon_l} r_{n,m}^2 + \tau^{\varepsilon_n} r_{m,l}^2 + \tau^{\varepsilon_m} r_{n,l}^2}{r_{n,m}\, r_{m,l}\, r_{n,l}}\right)^2 - 4\,\frac{\tau^{\varepsilon_n+\varepsilon_l}}{r_{n,l}^2}\right]^{1/2},$$

$r_{n,m}$ — знаменатель подходящей дроби $[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m]$ числа θ_n и $\varepsilon_n = [1-(-1)^n]/2$.

Эта теорема является обобщением одной теоремы Фудзивара (Fujiwara, Proc. Imp. Acad. Japan, 1926, 2) и доказывается путем обобщения его метода.

По резюме автора.

3743. Об одном доказательстве теоремы Лагранжа, обобщенной на случай разложения квадратической иррациональности в полуправильную непрерывную дробь. Мурзаев Е. А., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 115—120

Пусть

$$\alpha = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \ldots$$

обозначает разложение числа α в полуправильную непрерывную дробь.

Обобщение известной теоремы Лагранжа о разложении квадратической иррациональности в правильную непрерывную дробь, данное в статье, гласит: Если при разложении квадратической иррациональности в полуправильную непрерывную дробь последовательность чисел b_i является периодической (т. е. $b_{i+k} = b_i$, начиная с некоторого конечного значения i), то сама полуправильная дробь будет также периодической.

Дано новое доказательство известной теоремы. Разложение квадратической иррациональности в непрерывную дробь по ближайшим целым всегда периодично. П. Г. Когония

3744. О конструкции систем представителей классов примитивных бинарных квадратичных форм первого и второго рода детерминанта $D \equiv 1 \pmod 8$. Челлитти (Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinante $D \equiv 1 \pmod 8$. Cellitti Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **21**, № 1—2, 57—60 (итал.)

Приводится теорема автора (РЖМат, 1956, 7859): Каждая примитивная форма (a, b, c) первого рода

эквивалентна другой примитивной форме первого рода (a', b', c'), у которой $a' \equiv 0 \pmod 4$, b', c' — нечетные.

Отсюда получается система представлений всех m классов данного определителя D при помощи произвольно выбранных, неэквивалентных между собою форм $(4a_1, b_1, c_1)$, $(4a_2, b_2, c_2)$, ..., $(4a_m, b_m, c_m)$, где b_i, c_i — нечетные коэффициенты.

Приводятся аналогичные результаты для форм второго рода. В. А. Голубев

3745. Заметка о числе классов алгебраических числовых полей. И в а с а в а (A note on class numbers of algebraic number fields. I w a s a w a K e n k i c h i), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, 20, № 3—4, 257—258 (англ.)

Доказывается, что число классов идеалов абелева поля над рациональным полем с ведущим дивизором p^e $(e \geqslant 1)$ взаимно просто с p, если предположить, что p — регулярное простое число, т. е. если число классов идеалов поля деления единичного круга на p частей не делится на p. Б. М. Уразбаев

3746. Элементарное доказательство теоремы Морделла-Вейля о решении в рациональных числах диофантова уравнения $x(x^2+Cx+D)=z^2$. Б ю к е (Démonstration élémentaire du théorème de Mordell-Weil pour l'équation diophantienne en nombres rationnels $x(x^2+Cx+D)=z^2$. B u q u e t A.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 379—390 (франц.)

Теорема Морделла-Вейля утверждает, что все рациональные решения уравнения $x^3+dx+e=z^2$ могут быть получены из конечного числа основных решений. Доказательство этой теоремы основано на теории алгебраических чисел, так как использует разложение в поле $R(\eta)$, где η — корень уравнения $\eta^3+d\eta+e=0$.

В настоящей работе рассмотрен случай, когда многочлен, стоящий в левой части, приводим. (В этом случае уравнение приводится к указанному в заглавии виду). Это позволило автору на основе идей, близких к идеям Вейля, доказать теорему Морделла-Вейля для этого случая, не используя теорию алгебраических чисел. В. Д. Подсыпанин

3747. О диофантовом уравнении вида $y^2-f^2=x^3$. Х е м е р (On some diophantine equations of the type $y^2-f^2=x^3$. H e m e r O v e), Math. scand., 1956, 4, № 1, 95—107 (англ.)

Решение в целых числах уравнения

$$y^2 - k = x^3 \qquad (1)$$

при $k > 0$ сводится к решению нескольких уравнений вида $F(u, v)=m$, где $F(u, v)$ — форма третьей степени с отрицательным дискриминантом. Последнее же часто можно решить методом Б. Н. Делоне (Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, Тр. Матем. ин-та АН СССР 1940, 11).

В диссертации (On the diophantine equation $y^2 - k = x^3$, Uppsala, 1952) и добавлении к ней (РЖМат, 1955, 50) автор дал новые теоремы, облегчающие разыскивание этих решений в некоторых случаях. В настоящей работе эти теоремы несколько обобщены. Для иллюстрации использования полученных теорем автор решает уравнение (1) при $k=f^2$ и $11 \leqslant f \leqslant 25$. В. Д. Подсыпанин

3748. Об условиях Касселса разрешимости в рациональных числах диофантова уравнения $\eta^2=\xi^3-D$. С е л ь м е р (On Cassels' conditions for rational solubility of the diophantine equation $\eta^2=\xi^3-D$. S e l m e r E r n s t S.), Arch. math. og naturvidensk., 1956, 53, № 1, 115—137 (англ.)

Исследуя решение в рациональных числах уравнения

$$\eta^2 = \xi^3 - D, \qquad (1$$

Касселс установил, что оно сводится к нахождению целых рациональных x и t целого числа α из поля $R(\delta)$, удовлетворяющих равенству

$$x - t^2\delta = \mu\alpha^2, \qquad (2$$

где $\delta = \sqrt[3]{D}$, а μ принимает несколько определенных значений из поля $R(\delta)$ (Cassels J. W. S., Acta math., 1950, 82, 243—273). Для установления отсутствия решений уравнения (2) при определенном μ Касселс дает ряд необходимых условий разрешимости (2), имеющих вид сравнений в поле $R(\delta)$ по модулям, представляющим степени делителей 2 и 3 в этом поле. Завершая свою работу таблицей решений уравнения (1) для $|D| \leqslant 50$, Касселс иногда формулирует свои условия применительно к указанным значениям D.

В реферируемой работе ставится задача о нахождении таких условий, при выполнении которых сравнение $x - t^2\delta \equiv \mu\alpha^2 \pmod m$ было бы разрешимо при любом m.

Выясняется, что сравнение по модулям, взаимно простым с $6D$, рассматривать не имеет смысла, ибо по этим модулям сравнение всегда разрешимо. В случае, если D точно делится на третью степень простого числа p, следует рассмотреть сравнение по модулю p.

Сравнения по модулям, рассматриваемым Касселсом, дополнены, упрощены и обобщены на случай любого D. Попутно замечены и исправлены отдельные погрешности, вкравшиеся в работу Касселса. В. Д. Подсыпанин

3749. О решении в натуральных числах уравнения $x^m-y^n=1$. Х а м п е л ь (On the solution in natural numbers of the equation $x^m-y^n=1$. H a m p e R.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 1—4 (англ.)

Доказывается, что неопределенное уравнение $x^m - y^n = 1$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, не имеет натуральных решений, для которых $x - y = \pm 1$, кроме решения $x=3$, $y=2$, $m=2$, $n=3$.

Для случая $x - y = -1$ это устанавливается совсем просто, так как сводится к известному уравнению $2^x - 3^y = 1$. Для случая $x - y = +1$ доказательство несколько сложнее. Оно основано на следующей теореме: Для того чтобы 11^a (по системе счисления с основанием n) имело бы p рядом стоящих нулей, необходимо и достаточно, чтобы $a = \rho n^p$, где $\rho \not\equiv 0 \pmod n$. В. Д. Подсыпанин

3750. Об уравнении $x^s-y^t=1$, где $|x-y|=1$. Ш и н ц е л ь (Sur l'équation $x^s-y^t=1$, où $|x-y|=1$. S c h i n z e l A.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 5—6 (франц.)

Доказывается, что уравнение $x^s - y^t = 1$, где $|x-y|=1$, не имеет решений в натуральных числах > 1, кроме $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$. Впервые этот факт доказал Хампель, автор приводит более короткое доказательство. В. М. Архангельская

3751. Об уравнении $x^s-y^t=a^t$, где $|x-y|=a$. Р о т к е в и ч (Sur l'équation $x^s-y^t=a^t$, où $|x-y|=a$. R o t k i e w i c z A.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 7—8 (франц.)

Обобщается теорема, доказанная Шинцелем (реф. 3750).

Доказывается, что уравнение $x^s - y^t = a^t$, где a — натуральное, не имеет решений в натуральных числах > 1, кроме $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$, $|x-y|=a$, $(x, y)=1$. В. М. Архангельская

3752. О неопределенном уравнении $x^{2n}+y^{2n}=z^2$. Б а т т а л ь я (Sull'equazione indeterminata $x^{2n}+$

$+y^{2n}=z^2$. Battaglia Antonio), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 217—219 (итал.)

Доказывается теорема: Для того чтобы уравнение $x^{2n}+y^{2n}=z^2$ при n простом, y нечетном, делящемся на n, имело целочисленные решения, необходимо, чтобы $2^{n-1}-1\equiv 0 \pmod{n^2}$. В. А. Голубев

3753. Обобщение теоремы Вифериха. Гребенюк Д. Г., Докл. АН УзССР, 1956, № 8, 9—11 (рез. узб.)

Рассматривается теорема: Для того чтобы уравнение $x^p+y^p=z^p$ имело решение $x=a$, $y=b$, $z=c$ в целых числах, необходимо, чтобы все делители числа $a+b-c$, взаимно простые с каждым из чисел a, b, c, делили число $2^{p-1}-1$. П. Н. Реморов

3754. Решение и обобщение одной проблемы Шура о неприводимости полиномов. Шереш (Lösung und Verallgemeinerung eines Schurschen Irreduzibilitätsproblems für Polynome. Seres I.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 2, 151—157 (нем.; рез. русск.)

Шур (Schur I., Arch. Math. und Phys., 1908, 13, 367) поставил задачу: Если a_1, a_2, ..., a_M $(M\geqslant 1)$ — различные целые числа, то полиномы

$$F_n(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{2^n}+1,\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

неприводимы над полем рациональных чисел. До последнего времени неприводимость полиномов $F_n(x)$ была установлена лишь для частных случаев: $n=1$, 2, 3.

В реферируемой работе с помощью теорем Кронекера об единицах поля корней из единицы получены два класса полиномов, неприводимых над полем рациональных чисел; в один из них при $M\geqslant 5$ входят полиномы $F_n(x)$. Особо доказывается неприводимость $F_n(x)$ при $M\leqslant 4$. Тем самым устанавливается неприводимость $F_n(x)$ при любом $n\geqslant 1$. И. Г. Мельников

3755. Целые полиномы от x нечетной степени n, принимающие n раз каждое из $2m$ значений $\pm N_1$, ..., $\pm N_m$. Палама (Polinomi interi in x di grado n dispari che assumono n volte ciascuno dei $2m$ valori $\pm N_1$, ..., $\pm N_m$. Palamà Giuseppe), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 368—370 (итал.)

Указывается как, используя некоторые многостепенные числовые системы, построить полиномы с целыми коэффициентами степени $2n+1$, принимающие $2n+1$ раз каждое из заданных значений $\pm N_1$, ..., $\pm N_m$. Фактически для $n>1$ нужные многостепенные системы неизвестны. В. Д. Подсыпанин

3756. Об одной теоретико-числовой сумме. Сельберг (Über eine zahlentheoretische Summe. Selberg Sigmund), Math. scand., 1956, 4, № 1, 129—142 (нем.)

Пусть

$$\sigma_k(x)=\sum_{\lambda=1}^{k}\left\{x\left[\frac{\lambda}{x}\right]-(x+1)\left[\frac{\lambda}{x+1}\right]\right\},$$

где k — некоторое натуральное число, x — положительное вещественное число, $[y]$ — наибольшее целое число $\leqslant y$. Элементарным способом доказывается, что для всех k и x $\sigma_k(x)\leqslant k$. Этот результат дополняет найденную ранее автором оценку $\sigma_k\geqslant 0$.

Н. В. Гордеев

3757. О коэффициентах ряда Блазиуса. Салие (Über die Koeffizienten der Blasiusschen Reihen. Salié Hans), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4—6, 241—248 (нем.)

Блазиус, в случае $n=3$, представил решение дифференциального уравнения $y^{(n)}=\lambda y y^{(n-1)}$, удовлетворяющее определенным начальным условиям, в следующем виде

$$y=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu-1}\frac{x^{n\nu-1}}{(n\nu-1)!}c_\nu^{(n)},$$

где $c_\nu^{(n)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$c_k^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{k-1}\binom{n(k-1)-1}{n\nu-1}c_\nu^{(n)}c_{k-\nu}^{(n)},\quad k>1;\quad c_1^{(n)}=1.$$

Известно, что $c_k^{(1)}=(k-1)!$, $c_k^{(2)}=(2^{2k}-1)k^{-1}2^k B_{2k}$, где B_{2k} — числа Бернулли. В случае $n=3$ Блазиус вычислил значения $c_k^{(3)}$ для $1\leqslant k\leqslant 8$.

В настоящей работе изучаются числа $c_k^{(n)}$, и в случае $n\geqslant 3$ доказывается несколько общих теорем, в том числе

Теорема 1. При фиксированном k

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{(k-1)/2}}{k^{kn}}c_{k+1}^{(n)}=\frac{k^{1/2}}{(2\pi)^{(k-1)/2}k!},\quad k\geqslant 1.$$

Теорема 2. Пусть $p\mid n$ и $n=pn_1$, тогда

$$c_k^{(n)}\equiv c_k^{(n_1)}\pmod{p}.$$

А. П. Лурсманашвили

3758. Заметка о сравнении четвертой степени. Карлиц (Note on a quartic congruence. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 8, 569—571 (англ.)

Даются условия, при которых сравнение $x^4-2ax^2+n\equiv 0 \pmod{p}$ с простым модулем $p>2$ является неприводимым или разлагается на неприводимые множители первой или второй степени. Э. К. Фогелс

3759. Самопорождаемые числа. Капрекар (Self-numbers. Kaprekar D. R.), Scripta Math., 1956, 22, № 1, 80—81 (англ.)

Пусть N_i — целое число, а d_i — сумма его цифр. Тогда, у всякого числа N_i есть последующее $N_{i+1}=N_i+d_i$, но не всегда есть предыдущее N_{i-1} такое, что $N_{i-1}+d_{i-1}=N_i$. Число N_i названо самопорождаемым, если оно не имеет предшествующего в указанном смысле. Самопорождаемыми являются числа 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64 и далее, например, 132, 929, 1952, 874 531 и т. п. Не поставлено никаких проблем, касающихся этих чисел. Б. А. Кордемский

3760. О многостепенных системах. Ксерудакес (Sur des systèmes multigrades. Xiroudakis Georges), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 371—378 (франц.)

Дан прием целочисленных решений систем уравнений:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r \overset{k}{=} B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_i\quad (k=2,\ 3)$$
$$A_1+A_2=B_1+B_2\neq 0,$$

где $r\geqslant 2$, $i\geqslant 3$. Дано много примеров. Так, при $r=3$, $i=4$ имеем, например: $59,\ 95,\ 84\overset{k}{=}47,\ 107,\ 48,\ 60$ $(k=2,\ 3)$. Далее решена система уравнений

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r \overset{k}{=} B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_i\quad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Например: $7,5,4,8,12\overset{k}{=}1,11,2,10,6,6$ $(k=1,2,3)$ (см. также РЖМат, 1955, 4856). В. А. Голубев

3761. Многостепенной анализ. Ийер (Analyse multigrade. Iyer Venkatachalam R.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 416—417 (франц.)

Дан прием решения в целых числах четырехчленных трехстепенных систем уравнений вида

$$x^2,\ x^2,\ a,\ b \overset{k}{=} y^2,\ y^2,\ c,\ d;\ k = 1, 2, 3.$$

В. А. Голубев

3762. Образование частями трехстепенных цепочек равенств с пятью членами. Глодан (Formation de chaînes trigrades avec cinq termes par maillon. Glodan A.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 412—414 (франц.)

Дан способ получения целых решений системы

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k + x_5^k = y_1^k + y_2^k + y_3^k + y_4^k + y_5^k = \ldots$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

при помощи параметрических решений системы с меньшим числом неизвестных. Даны примеры. В. А. Голубев

3763. Диофантовы уравнения. Тебо (Equations diophantiennes. Thébault V.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 421—423 (франц.)

Даны формулы и примеры целочисленных решений уравнений или систем уравнений:

$$1)\ n + p + q = r + s + t,\ npq = rst,\ n = r + s,$$

$$t = p + q;\ 2)\ ab(a + b) = cd(c + d);\ 3)\ a^2 + b^2 = (a - b)^4;\ 4)\ 2A^2 + B = 2C^2 + D,$$

$$2A^6 + B^3 = 2C^6 + D^3.$$

Дана таблица 13 решений уравнения $A^4 + B^4 + C^4 = D^4 + E^4$ в натуральных числах.

Опечатка. В системе 4) напечатано $2A^6 + D^2 = 2C^6 + D^3$ вместо $2A^6 + B^3 = 2C^6 + D^3$.

В. А. Голубев

3764. О последовательностях Пелля. Тебо (Sur des suites de Pell. Thébault Victor), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 390—395 (франц.)

Доказано несколько свойств рекуррентных последовательностей $\{u_n\}$, определяемых по формуле $u_{n+1} = pu_n + u_{n-1}$, где p — натуральное число; например, выражение $(p^2/4 + 1)u_n^2 + (-1)^n$ является точным квадратом.

Далее рассматриваются две последовательности Пелля, определяемые по формуле $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ при $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ — для первой и $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ — для второй последовательности. В. А. Голубев

3765. Числа Стирлинга как суммы треугольных чисел. Бенсон (Stirling numbers as sums of triangular numbers. Benson Arne), Scripta Math., 1956, 22, № 1, 85 (англ.)

Число Стирлинга n_2 первого рода — сумма произведений всех сочетаний (без повторений) по два из чисел 1, 2, ..., n. Число Стирлинга ${}_2n$ второго рода — это сумма произведений всех сочетаний с повторениями по два из чисел 1, 2, ..., n. На примерах показано, что $n_2 = 2\Delta 1 + 3\Delta 2 + \ldots + n\Delta(n-1)$ и ${}_2n = \Delta 1 + 2\Delta 2 + \ldots + n\Delta n$, где $\Delta k = k(k+1)/2$.

Б. А. Кордемский

3766.* Представление произвольных чисел в виде суммы произвольного числа членов. Андрианов Г. Н., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 269—272

3767. Второе дополнение к Эратосфену. Стейнман (A second sequel to Eratosthenes. Steinman D. B.), Scripta Math., 1956, 22, № 1, 79—80 (англ.)

Пусть N — простое число. Если все элементы p_i множества простых чисел, меньших $\sqrt{N}$, произвольно разбить на две группы чисел p_a и p_b и составить произведения $\pi(p_a)$ и $\pi(p_b)$, то всегда найдется такая пара целых чисел A и B, что $N = A\pi(p_a) \pm B\pi(p_b)$. Доказательство элементарное. Б. А. Кордемский

3768. Об одной элементарной оценке величины очередного простого числа в натуральном ряду. Артюхов М. М., Уч. зап. Северо-Осетинск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 20, 227—234

Очень простым и элементарным способом даны 1) Доказательство оценки Бонзе порядка роста очередного простого числа: при $n \geqslant 4$

$$p_{n+1} < \sqrt{\Pi_n}\ \ (\Pi_n = p_1 p_2 \ldots p_n).$$

2) Следующее улучшение оценки Бонзе: по наперед заданному (сколь угодно большому) k можно указать такое n_0, что при всех $n > n_0$, будет действовать оценка

$$p_{n+1} < \sqrt[k]{\Pi_n}.$$

Примечание референта. По-видимому, автору неизвестно совершенно элементарное доказательство последней оценки, принадлежащее Р. Варшамову (РЖМат, 1956, 3639). П. Г. Когония

3769. Несколько разложений на множители. Габа (Quelques factorisations. Gabard E.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 415—416 (франц.)

Дано разложение на множители 6 чисел вида $a2^p + 1$, например, $495 \cdot 2^{19} + 1 = 17 \cdot 15\,266\,033$. Далее указаны делители 5 чисел вида $2^p + 1$, например, делитель $104\,582\,483$ числа $2^{52291241} + 1$. В. А. Голубев

3770. Свойство полных степеней. Облат (Une propriété des puissances parfaites. Obláth Richard), Mathesisf, 1956, 65, № 7—9, 356—364(франц.)

Как следствие из некоторых результатов Нагеля и Юнггрена получается, что число, записанное несколькими одинаковыми цифрами в десятичной системе счисления, не может быть полной степенью натурального числа. Б. Д. Подсыпанин

3771. О египетском методе умножения. Костье (A propos de la méthode égyptienne de multiplication. Costier J.), Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. et génie, 1956, 34, № 3, 17—18 (франц. рез. флам.)

Обращается внимание на связь между египетским способом умножения и выражением числа в двоичной системе счисления. В. А. Голубев

3772. Введение в учение о кольцах и полях, числовых и абстрактных. Константинеску, Константинеску (Introducere în studiul inelelor și corpurilor numerice și abstracte. Constantinescu L., Constantinescu B.), Gaz. mat. și fiz., 1956, B7, № 9, 454—463 (рум.)

Популярное изложение основных понятий теоретической арифметики: числового кольца и поля, абстрактного кольца и поля. Подробно рассмотрены многие примеры. Даны приложения в алгебре, например правило знаков при умножении. В. А. Голубев

3773. О международной конференции математиков, происходившей в Индии (с 14 по 28 февраля 1956 г.) Сатака (インドにおける國際數學會議報告・佐武一郎), 數學, Сугаку, 1956, 8, № 1, 54—55 (японск.)

3774. К. Три лекции о последней теореме Ферма. Морделл (Three lectures on Fermat's last theorem. 4 vol. Mordell Louis Joel. Chelsea, 1955, 3. 25 doll.) Cumul. Book Index, 1956, 59, № 1, 66 (англ.)

АЛГЕБРА

3775 К. **Введение в алгебру.** Селе (Bevezetés az algebrába. Egyetemi tankönyv. 2. kiad. Szele Tibor: Budapest, Tankönyvkiadó, 1955, 275 l., 39 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 9, 292 (венг.)

Учебник для университетов, соответствующий университетской программе, принятой в Венгрии. Книга состоит из следующих глав: Комплексные числа; Комбинаторный анализ; Определители; Системы линейных уравнений; Уравнения и многочлены высших степеней; Приложения теории определителей. Кроме того, имеется и приложение, посвященное аксиоматическому определению вещественных и комплексных чисел.

Этот общеизвестный материал изложен с высоким дидактическим мастерством, с многочисленными методическими усовершенствованиями. Отметим, в частности, наглядное и в то же время совершенно строгое введение комплексных чисел и определителей. Единое, хорошо организованное изложение способствует основной цели автора — дать возможность читателю наиболее быстро подготовиться к изучению современной абстрактной алгебры. Этой цели служит также напечатанный мелким шрифтом материал, выходящий за рамки университетской программы. Кроме того, книга снабжена интересными примерами и задачами. A. Kertész

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3776. **Общие корни двух уравнений.** Михалашку (Rădăcini comune la două ecuații. Mihalașcu D.), Gaz. mit. și fiz., 1956, B7, № 8, 395—401 (рум.)

3777. **Способ приближенного вычисления действительных корней алгебраических уравнений.** Лю Гуансюнь (代數方程實根的一個近似計算法. 刘光勛), 數學通報, Шусюэ тунбао, 1956, № 9, 8—10 (кит.)

Предлагается следующий метод приближенного вычисления действительных корней алгебраических уравнений: пусть a_k, b_k — приближенные значения соответственно по недостатку и по избытку некоторого корня уравнения $f(x)=0$. Полагая в этом уравнении $x=a_k+\alpha$, перенося член первой степени относительно α в правую часть уравнения и деля на соответствующий коэффициент (если он отличен от нуля), получим соотношение вида

$$\alpha = D_0 + D_2\alpha^2 + \ldots + D_n\alpha^n.$$

Следующее приближение a_{k+1} искомого корня по недостатку автор предлагает находить по формуле

$$a_{k+1} = D_0 + D_2\beta_2^2 + \ldots + D_n\beta_n^n,$$

где $\beta_i=0$, если $D_i>0$ и $\beta_i=b_k-a_k$, если $D_i<0$. Аналогично определяется приближение по избытку b_{k+1}.

Рассмотрены примеры, показывающие быструю сходимость метода. Однако общего исследования скорости сходимости и условий применимости метода не произведено. Юань Чжао-дин

3778. **Об основной теореме алгебры.** Эстерман (On the fundamental theorem of algebra. Estermann T.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 122, 238—240 (англ.)

Новое доказательство леммы Даламбера.

3779. **Векторные или линейные пространства.** Магдонелль (Les espaces vectoriels ou lineéaires. Magdonelle A.), Bull. Assoc. ingrs issus École applic. artill. et génie, 1956, 34, № 3, 37—56 (франц.; рез. флам.)

Основы теории линейных пространств.

3780. **О некоторых свойствах узлов системы линейных неравенств.** Ерёмин И. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 169—172

Автор дает новое доказательство теоремы референта о совместности конечной системы линейных неравенств (РЖМат, 1953, 68), более простое, чем доказательство референта, а также устанавливает геометрический смысл отношений определителей, содержащихся в формулировке этой теоремы. С. Н. Черников

3781. **Квадратичные и эрмитовы формы.** Лелон (Formes quadratiques et hermitiennes. Lelong Pierre), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 179, 22—36 (франц.)

3782. **Линейные преобразования и матрицы.** Лихнерович (Applications linéaires et matrices. Lichnerowicz André), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 179, 1—12 (франц.)

3783. **Ранг матрицы и главных подматриц.** Майо (Rang d'une matrice et sous-matrices principales. Maillot M.), Rev. math. spéc., 1956, 67, № 4, 405—406 (франц.)

Доказывается теорема о ранге матрицы.

3784. **Некоторые свойства собственных значений матрицы.** Ван (Some properties of the proper values of a matrix. Wong Y. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 891—899 (англ.)

Доказаны следующие утверждения: Если характеристические числа квадратной матрицы с неотрицательными элементами меньше единицы, то сумма элементов любой строки (или столбца) матрицы также меньше единицы. Если сумма модулей $S_k=\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$ элементов каждого столбца квадратной матрицы порядка n с комплексными элементами не превосходит единицы, то из неравенств

$$\sum_{i=k}^{n}|a_{ik}|<1 \qquad (1)$$

$k=1, 2, \ldots, n$, следует, что

$$|a_{kk}|+\sum_{j=k+1}^{n}S_j|a_{jk}|<1 \qquad (2)$$

$$k=1, 2, \ldots, n-1;\ |a_{nn}|<1.$$

Если выполняется условие (1) или (2), то максимальное по модулю характеристическое число матрицы A меньше (по модулю) единицы.

В заключение работы приведено десять равнозначных условий того, что все характеристические числа неотрицательной матрицы по модулю меньше единицы.

А. Ф. Голубчиков

3785. **Об одном классе определителей, связанных с данной матрицей** Эпштейн. (On a class of determinants associated with a matrix. Epstein M. P.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 160—162 (англ.)

Пусть A — квадратная матрица порядка n над некоторым полем k. Тогда при любом целом положительном m имеют смысл определители $\Delta_m=\det[\mathrm{Tr}(A^{i+j})]$, $0\leqslant i,\ j\leqslant m-1$, где $\mathrm{Tr}(A^{i+j})$ — след матрицы A^{i+j}. Пусть r — число различных характеристических чисел матрицы A. Оказывается, что если $m>r$, то $\Delta_m=0$. Если характеристика поля k равна нулю или если поле k имеет характеристику $p>n$, то r равно мак-

симальному значению m, при котором $\Delta_m \neq 0$. Если поле k имеет характеристику p и n не делится на p, то существует такое m, что $\Delta_m \neq 0$.

На основании этой теоремы получено условие приводимости матрицы к диагональной форме, являющееся в случае полей характеристики нуль необходимым и достаточным (об этом условии см. РЖМат, 1956, 209).

Если поле k содержится в поле комплексных чисел, то имеют смысл определители $\Delta_m^* = \det [\mathrm{Tr}\,(A^i A^{*j})]$.

Оказывается, что если матрица A нормальна, то $\Delta_m^* \neq 0$ тогда и только тогда, когда $m \leqslant r$. А. И. Узков

3786. Канонический вид матрицы Q_{AB}. Стендер П. В., Зап. Ленингр. заоч. индустр. ин-та. Л., ЛГУ, 1955, 3—12

Жорданова форма матрицы линейного преобразования $X' = AX - XB$ выражается через жордановы формы $n \times n$-матрицы A и $m \times m$-матрицы B (здесь X и X' — переменные $n \times m$-матрицы). Для частного случая $A = B$, мало отличающегося от общего случая, такой же результат был опубликован А. Ф. Голубчиковым (Докл. АН СССР, 1951, 77, 7—9, а также РЖМат, 1955, 84). Ф. Р. Гантмахер

3787. Теорема редукции для вполне положительных матриц. Уитни (A reduction theorem for totally positive matrices. Whitney A. M.), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 88—92 (англ.; рез. евр.)

Вещественная $m \times n$-матрица называется вполне положительной (строго вполне положительной), если все миноры любого порядка этой матрицы неотрицательны (соответственно положительны). Доказана теорема, позволяющая свести вопрос о вполне положительности $m \times n$-матрицы к такому же вопросу для некоторой $m \times (n-1)$-матрицы. Изложение опирается на доказываемую в статье теорему об аппроксимации с любой степенью точности вполне положительной матрицы при помощи строго вполне положительной. Эта теорема не является новой (Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, М., 1941, стр. 212—213). Ф. Р. Гантмахер

3788. О гиперматрицах с попарно перестановочными блоками и их применение в динамике решеток. Эгерварн (Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmázásáról a rácsdinamikában. Egerváry Jenő), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), 3, № 1—2, 31—47 (венг.; рез. русск., англ.)

Совпадает по названию и содержанию со статьей автора (РЖМат, 1955, 4877). Ф. Р. Гантмахер

3789 К. Введение в теорию линейных пространств (Учебник для ун-тов). Изд. 2-е. Шилов Г. Е М., Гостехиздат, 1956, 303 стр., илл., 6 р. 95 к.

ГРУППЫ

3790. Описание некоторых конечных групп. Брауэр (或る種の有限羣の Characterization. Brauer R.) 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 245—246 (японск.)

Резюме доклада

3791. О группах четных порядков. Брауэр (偶數位數の群について. Brauer R.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 242—243 (японск.)

Резюме лекции.

3792. Теоретико-числовое исследование групп конечного порядка. Брауэр (有限羣の整數論的研究 Brauer R.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 207—209 (японск.)

Резюме лекции.

3793. Представители связных компонент группы классов идеальных элементов. Артин (イデール類羣の連結成分の代 表系 Artin E.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 203—204 (японск.)

Резюме лекции

3794. О представлениях групп порядка, не делящегося на квадрат простого числа. Шик (Über die Darstellungen der Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl. Schiek Helmut), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4—6, 287—307 (нем.)

Исследуются группы порядка, не делящегося на квадрат простого числа (определяющие соотношения для таких групп были опубликованы в 1895 г. Гёльдером). Определены типы подгрупп этих групп, порядок коммутанта, типы нормальных делителей, число классов сопряженных элементов. Исследуются также комплексные линейные представления этих групп. Определено число неэквивалентных неприводимых представлений и указан метод установления соответствия между классами сопряженных элементов и неэквивалентными неприводимыми представлениями. В. К. Туркин

3795. Степени неприводимых представлений группы S_n. Робинсон (The degree of an irreducible representation of S_n. Robinson G. de B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 6, 357—359 (англ.)

Как известно, каждому разбиению числа n в сумму неотрицательных слагаемых: $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ ($\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$) соответствует неприводимое представление симметрической группы S_n, степень которого равна

$$f = n! \,|\, z_{ij} \,|,$$

где $z_{ij} = \dfrac{1}{(\lambda_j - j + i)!}$, причем $z_{ij} = 1$, если $\lambda_j - j + i = 0$, и $z_{ij} = 0$, если $\lambda_j - j + i < 0$ (Мурнаган Ф., Теория представлений групп, 1950).

Дается новое доказательство этой формулы, использующее предыдущие результаты автора (РЖМат, 1955, 4250). С. Д. Берман

3796. О разрешимых примитивных уравнениях и их группах. Лилин Н. В., Сб. тр. Общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-т холодильн. пром-сти, 1956, 12, 23—30.

Обзорная статья.

3797. О базисных подгруппах абелевых p-групп. Штейнфельд (Megjegyzés szele tibor egyik dolgozatához. Steinfeld Ottó), Magyar tud. akad. Mat. és. fiz. tud. oszt. közl., 1956, 6, № 2, 229 (венг.)

Перевод из журнала Acta Math. Acad. sci. hung (см. РЖМат, 1955, 4256).

3798. Группы, близкие к конечным нильпотентным группам. Холл (Finite-by-nilpotent groups. Hall P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 611—616 (англ.)

Группа $\mathfrak{G}$ называется близкой к конечным нильпотентным группам, если существует такое число k, что $k+1$-й член убывающего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ является конечной группой. Доказано, что группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда близка к конечным нильпотентным группам, когда существует такое число l, что l-й член возрастающего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ имеет в $\mathfrak{G}$ конечный индекс.

Наименьшие числа k и l, обладающие этими свойствами, являются инвариантами группы $\mathfrak{G}$ и обозначаются через $k(\mathfrak{G})$ и $l(\mathfrak{G})$ соответственно. Доказано, что для целых положительных k и l тогда и только тогда существует такая группа $\mathfrak{G}$, близкая к конечным нильпотентным группам, что $k = k(\mathfrak{G})$ и $l = l(\mathfrak{G})$, когда $k \leqslant l \leqslant 2k$. Б. И. Плоткин

3799. Регулярные p-группы без элементов бесконечной высоты. Кемхадзе Ш. С. (რეგულარული p-ჯგუფი უსასრულო სიმაღლის ელემენტის გარეშე. ქემხაძე შ.), Сообщ. АН Груз ССР, 1956, 17, № 8, 673—680

Последовательность элементов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$ p-группы $\mathfrak{G}$, порядки которых соответственно равны $p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_\alpha}, \ldots (n_\alpha \geqslant 1)$, называется базой единственности, если каждый отличный от единицы элемент группы $\mathfrak{G}$ может быть единственным способом выражен в виде произведения $\theta_{\alpha_1}^{k_1}\theta_{\alpha_2}^{k_2}\ldots\theta_{\alpha_r}^{k_r}$, где $0 < k_i < p^{n_{\alpha_i}}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r$. Доказано, что если в счетной регулярной p-группе $\mathfrak{G}$ без элементов бесконечной высоты всякая подгруппа с двумя образующими конечна, а нижний слой группы $\mathfrak{G}$ лежит в ее центре, то группа $\mathfrak{G}$ обладает базой единственности.

Б. И. Плоткин

3800. FC-нильпотентные и FC-разрешимые группы. Дьюгид, Мак-Лейн (*FC*-nilpotent and *FC*-soluble groups. Duguid A. M., McLain D. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 391—398 (англ.)

Элемент g группы $\mathfrak{G}$, имеющий в $\mathfrak{G}$ конечное число сопряженных, называется FC-элементом. FC-рядом группы $\mathfrak{G}$ называется такой ряд $E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{i-1} \subset H_i \subset \ldots \subset H_n = \mathfrak{G}$, что для любого i фактор-группа H_i/H_{i-1} состоит из всех FC-элементов фактор-группы $\mathfrak{G}/H_i$. Группы, обладающие конечными FC-рядами, называются FC-нильпотентными. Оказывается, что для таких групп условие максимальности для подгрупп, условие максимальности для нормальных делителей и конечность числа образующих являются равносильными условиями. Кроме того, условие минимальности для нормальных делителей равносильно условию минимальности для подгрупп.

Пусть N_r — класс групп, содержащих нильпотентную подгруппу конечного индекса, имеющую конечное число образующих, класс которой не больше r. Пусть далее L_r — класс всех FC-нильпотентных групп с конечным числом образующих, класс которых не больше r. Оказывается, что $N_r \supset L_r \supset N_{r-1}$.

Кроме FC-нильпотентных, автор рассматривает так называемые FC-разрешимые группы. Эти группы являются частным случаем WF-групп в смысле референта (РЖМат, 1957, 2076) и в связи с этим доказанные автором результаты, касающиеся FC-разрешимых групп, являются частными случаями соответствующих результатов референта. Б. И. Плоткин

3801. Некоторые вопросы теории групп без кручения. Плоткин Б. И., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 325—329

Подгруппа $\mathfrak{X}$ группы $\mathfrak{G}$ называется изолированной в $\mathfrak{G}$, если каждая циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ либо содержится в $\mathfrak{X}$, либо пересекается с $\mathfrak{X}$ по единице. Пусть $M(\mathfrak{G})$ — пересечение всех максимальных изолированных подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Оказывается, что если $\mathfrak{G}$ — группа без кручения, то подгруппа $M(\mathfrak{G})$ обладает свойствами, аналогичными известным свойствам Ф-подгруппы. Например, для R^*-группы (т. е. группы без кручения, у которой все факторгруппы без кручения являются группами с однозначной операцией извлечения корня (Курош А. Г., Теория групп, М., 1953)), обладающей конечным рациональным рядом, подгруппа $M(\mathfrak{G})$ нильпотентна.

На основе полученных результатов дается структурное определение нильпотентной группы без кручения конечного ранга и доказывается, что свободная нильпотентная группа с конечным числом образующих определяется (с точностью до группового изоморфизма) структурой своих подгрупп. С. Н. Черников

3802. О группах, обладающих разрешимым возрастающим инвариантным рядом. Мухаммеджан Х. Х., Матем. сб., 1956, 39, № 2, 201—218

Изучаются ZA-группы и группы, обладающие MA-рядом, т. е. таким инвариантным рядом

$$1 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\gamma = \mathfrak{G},$$

в котором каждый фактор $\mathfrak{A}_{\alpha+1}/\mathfrak{A}_\alpha$ является максимальным абелевым нормальным делителем факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_\alpha$. Из содержащихся в ней результатов отметим следующие: 1) периодическая ZA-группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, если хотя бы один ее максимальный абелев нормальный делитель удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей группы или если все ее факторы с натуральными индексами верхнего центрального ряда удовлетворяют условию минимальности для подгрупп; 2) группа (периодическая группа), обладающая MA-рядом, является разрешимой группой с условием минимальности для подгрупп, если факторы с натуральными индексами (соответственно, два первых фактора) некоторого ее MA-ряда удовлетворяют условию минимальности для подгрупп.

Кроме того, в работе содержится ряд интересных результатов, связанных с максимальными абелевыми нормальными делителями периодических групп, удовлетворяющими условию минимальности для подгрупп, а также даются некоторые новые определения p-групп в смысле референта. С. Н. Черников

3803. Нетеровы группы. Бер (Noethersche Gruppen. Baer Reinhold), Math. Z., 1956, 66, № 3, 269—288 (нем.)

Нетеровой группой автор называет группу, удовлетворяющую условию максимальности для подгрупп.

Основным результатом работы является следующая теорема. Если группа $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих и если каждый отличный от единицы гомоморфный образ группы $\mathfrak{G}$ содержит нетривиальный конечный или абелев с конечным числом образующих нормальный делитель, то такая группа $\mathfrak{G}$ является нетеровой группой.

Для доказательства этой теоремы используется понятие конечно определяемой группы, имеющее и самостоятельный интерес.

Группа $\mathfrak{G}$ называется конечно определяемой, если существуют такая свободная группа F конечного ранга и ее нормальный делитель N, порождаемый конечным множеством классов, сопряженных в F элементов, что $F/N \approx \mathfrak{G}$.

Приводятся некоторые соотношения относительно конечно определяемых групп, так, например, если группа $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих, то следующие два условия эквивалентны: 1) $\mathfrak{G}$ конечно определяемая; 2) если $H/N \approx \mathfrak{G}$ и H имеет конечное число образующих, то N порождается конечным числом классов сопряженных в H элементов.

Доказывается также, что расширение конечно определяемой группы с помощью конечно определяемой группы снова конечно определяемая группа.

Ряд результатов посвящен нетеровым нильпотентным и обобщенно нильпотентным группам. Из них отметим следующий: группа $\mathfrak{G}$ называется E-группой, если выполняется следующее условие:

E) пусть H — гомоморфный образ произвольной подгруппы группы $\mathfrak{G}$ и $N \neq 1$ — нормальный делитель группы H. Тогда для любого $X \in H$ найдется такой элемент $Y \neq 1$ в N, что $XY = YX$.

Доказывается, что нормальный дедитель N в группе $\mathfrak{G}$ конечен, если N — нетерова периодическая E-группа

и если для любого гомоморфизма σ группы $\mathfrak{G}$ каждый минимальный, содержащийся в N^σ нормальный делитель из $\mathfrak{G}^\sigma$ конечен. Приводятся некоторые критерии, при которых нетерова E-группа оказывается нильпотентной группой.

В заключение рассматриваются условия, при которых группа оказывается произведением своих нетеровых нормальных делителей, а также доказывается следующая теорема: Если каждый отличный от единицы гомоморфный образ группы $\mathfrak{G}$ содержит нетривиальный конечно определенный нетеров нормальный делитель, то такая группа локально нетерова.

Б. И. Плоткин

3804. Группы с дополняемыми подгруппами. Черникова Н. В., Матем. сб., 1956, **39**, № 3, 273—292

Изучаются группы, все подгруппы которых дополняемы; такие группы автор называет вполне факторизуемыми. Доказано, что группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она является таким полупрямым произведением двух своих подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (из которых одна, например $\mathfrak{A}$, является нормальным делителем), разлагающихся в прямое произведение циклических групп простых порядков, что все множители некоторого разложения группы $\mathfrak{A}$ инвариантны в $\mathfrak{G}$. Это предложение позволяет описать все вполне факторизуемые группы с помощью образующих и определяющих соотношений.

Далее доказано, что любую вполне факторизуемую группу $\mathfrak{G}$ можно вложить в некоторое полное прямое произведение конечных групп, порядки которых не делятся на квадраты простых чисел.

В этих полных прямых произведениях указан класс вполне факторизуемых подгрупп, исчерпывающий (с точностью до изоморфизма) все вполне факторизуемые группы.

Подгруппа этого класса тогда и только тогда локально нормальна, когда она лежит в обычном прямом произведении данных конечных групп. Существуют полные прямые произведения конечных групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, обладающие не вполне факторизуемыми периодическими подгруппами.

В заключение доказано, что локально конечная группа, обладающая нормальным множеством с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков, вполне факторизуема.

С. Н. Черников

3805. Неприводимые представления ортогональной группы со спином $^3/_2$. Венкатачалиенгар, Рао (The irreducible representation of the Lie-algebra of the orthogonal group with spin $^3/_2$. Venkatachaliengar K., Rao K. N. Srinivasa), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 5, 509—523 (англ.)

Пусть A_n — ассоциативная алгебра с образующими $1, \xi_1, \ldots, \xi_n$, подчиненными соотношениям

$$\{\xi_r\{\xi_r, \xi_s\}\} = \xi_s, \quad [\xi_r, \{\xi_s, \xi_t\}] = 0, \quad \xi_r^2 = \frac{3}{4} - \xi_r, \quad (1)$$

где $\{\xi_p, \xi_q\} = \xi_p\xi_q + \xi_q\xi_p$, $[\xi_p, \xi_q] = \xi_p\xi_q - \xi_q\xi_p$, а $A_n \times D_n$ — кронекеровское произведение алгебры A_n и спинорной алгебры D_n, т. е. алгебры с образующими $1, \eta_1, \ldots, \eta_n$, подчиненными соотношениям

$$\{\eta_p, \eta_q\} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q, \\ 1, & \text{если } p = q; \end{cases}$$

Пусть S — произвольное неприводимое представление алгебры $A_n \times D_n$. Легко видеть, что матрицы $S(\xi_k)$, $S(\eta_k)$, $k = 1, \ldots, n$, составляют систему образующих соответствующей полной матричной алгебры $\mathfrak{A}$. Кроме того, для любой ортогональной матрицы $\|a_{ik}\|$ порядка n подстановки $S(\xi_k) \to \sum a_{ik}S(\xi_i)$, $S(\eta_k) \to \sum a_{ik}S(\eta_i)$ определяют некоторый автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$. Но любой автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ имеет вид $A \to SAS^{-1}$, где матрица S определена с точностью до скалярного множителя. Таким образом, каждой ортогональной матрице ставится в соответствие матрица S. Нормировав матрицы S, получим в результате двузначное представление ортогональной группы. В работе на основе детального изучения представлений алгебры A_n доказывается, что этим способом можно получить все представления ортогональной группы со спином $^3/_2$.

Ф. А. Березин

3806. Обобщенные дробно-линейные подстановки. Сульдин А. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, **116**, № 1, 22—25

Рассматриваются преобразования $z_1 = zg\bar{g}$ пространства Z, порожденные элементами g комплексной классической группы $\mathfrak{G}$ порядка n.

Обозначения см. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, **36**.

Изучаются: 1) неподвижные точки такого преобразования (число их, как легко видеть, не превосходит $n!$); 2) поверхности пространства Z, определенные уравнением $\beta(zg) = 1$ (g фиксировано), и их поведение при преобразовании $z \to z\bar{g}$; 3) преобразования $z \to z\bar{z}_1 = zz_1$, $z \to z\bar{\delta}$, $z \to z\bar{s}$, на произведение которых разлагается произвольное преобразование $z \to z\bar{g}$; 4) размерности многообразий пар (u_1, u_2), u_1, $u_2 \in \mathfrak{A}$.

М. А. Наймарк

3807. Тождество Холла и типичные последовательности. Лазар (L'identité de Hall et les suites typiques. Lazard M.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac.sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 5, 1—13 (франц.)

Опираясь на связь между свободными алгебрами Ли и свободными группами, осуществляемую с помощью формулы Хаусдорфа, автор выводит некоторые тождества типа тождества Холла и изучает соответствующие типичные последовательности (определения см. РЖМат, 1956, 1563).

Б. И. Плоткин

3808. Основные понятия теории топологических групп. Ганя (Cîteva aspecte ale teoriei grupurilor topologice. Ganea T.), Gaz. mat. și fiz., 1956, **A8**, № 10, 510—518 (рум.)

3809. О некоторые типах теорем двойственности для топологических групп. II. Мацусита (Sur quelques types théorèmes de dualité dans les groupes topologiques. II. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 957—962 (франц.).

Продолжение предыдущей работы (РЖМат, 1956, 3686). Указываются некоторые новые типы теорем двойственности для локально компактных абелевых групп, связанные с различными топологизациями рассматриваемых пространств функций.

Н. Я. Виленкин

3810. Об ассоциативных системах, всякий идеал которых имеет единицу. Ким Кё Сек (모든 이데알이 단위 원소를 가지는 결합 씨스템에 관하여. 김교석), 조선 민주주의 인민 공화국 과학원 학보, Чосон минчуучуы инмин конгхвагук Гвахаквон хакпо, 1955, № 2, 45—50 (кор.)

Доказано, что любой идеал коммутативной или конечной полугруппы A тогда и только тогда обладает единицей, когда полугруппа A является теоретико-множественным объединением непересекающихся групп и множество всех ее идемпотентов вполне упорядочено относительно деления. Показано, что для бесконечных некоммутативных полугрупп это утверждение, вообще говоря, не верно. Ли Дён Ук

3811. Полугруппы, удовлетворяющие некоторым слабым видам правила сокращения. Шварц (O pologrupách splňujúcich zoslabené pravidlá krátenia. Schwarz Štefan), Mat.-fyz. časop., 1956, **6**, № 3. 149—158 (словац.; рез. русск., англ.)

Для того чтобы полугруппу S можно было представить в виде объединения подполугрупп, каждая из которых является полугруппой с левым сокращением, необходимо, чтобы S удовлетворяло следующему условию C: из $x^2 = xy = y^2$ следует, что $x = y$. Если полугруппа S коммутативна или периодична (для любого $x \in S$ существуют такие натуральные числа $p \neq q$, что $x^p = x^q$), то условие C также и достаточно.

Е. С. Ляпин

3812. Об одном классе подгрупп в E_n. Мостерт, Шилдс (On a class of semigroups on E_n. Mostert Paul S., Shields Allen L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 729—734 (англ.)

Пусть полупрямая $S_1 = [0, \infty)$ определена как топологическая полугруппа с нулем 0 и единицей 1. Доказано, что если множество F всех идемпотентов полугруппы S_1, отличных от 0 и 1, пусто, то полугруппа S_1 топологически изоморфна мультипликативной полугруппе M вещественных неотрицательных чисел. Если множество F не пусто, то оно содержит максимальный элемент e, $e < 1$, полугруппа S_1 является объединением подполугрупп $[0, e]$ и $[e, \infty)$, причем подполугруппа $[e, \infty)$ топологически изоморфна полугруппе M; e является единицей полугруппы $[0, e]$.

Кроме того, доказано, что если элементами полугруппы S с единицей f являются точки евклидова пространства E_n и S содержит подполугруппу B, являющуюся связным компактным подмногообразием размерности $n-1$, причем $f \in B$, то либо $n = 2$, либо $n = 4$, подполугруппа B является группой Ли, в S существует такая содержащаяся в центре подполугруппа J, топологически изоморфная полугруппе типа S_1, что $JB = S$, причем нуль полугруппы J является нулем всей полугруппы S. Л. М. Глускин

3813. Почти периодическое продолжение функций на полугруппах. Шифердеккер (Fastperiodische Fortsetzung von Funktionen auf Halbgruppen. Schieferdecker Eberhard), Math. Nachr., 1955 (1956), **14**, № 4—6, 253—261 (нем.)

Пусть $\mathfrak{X}$ — погружаемая (в группу) полугруппа с единицей и $D^*(\mathfrak{X})$ — группа, порожденная полугруппой $\mathfrak{X}$ (Lambeck J., Canad. J., Math., 1951, **3**, 33—43). Доказано, что комплекснозначная функция f_0, заданная на $\mathfrak{X}$, тогда и только тогда может быть продолжена до почти периодической функции f на группе $D^*(\mathfrak{X})$, когда f_0 является почти периодической функцией на полугруппе $\mathfrak{X}$ (РЖМат, 1956, 8626). Это продолжение возможно единственным образом. Средние значения функции f_0 на $\mathfrak{X}$ и ее продолжения f на $D^*(\mathfrak{X})$ (Maak W., J. reine angew. Math., 1952, **190**, 34—48) совпадают. Л. М. Глускин

3814. P-группоид частных группоида с операторами. Боччони (P-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori. Boccioni Domenico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, **25**, 176—195 (итал.)

Группоид G, т. е. множество с однозначной бинарной операцией, называется левым P-группоидом, где P — некоторая полугруппа, если любым элементам $\alpha \in P$, $u \in G$ отнесен элемент $\alpha u \in G$, причем $\alpha(uu_1) = \alpha u \cdot \alpha u_1$, $\alpha(\alpha_1 u) = (\alpha\alpha_1)u$.

Пусть M — подполугруппа полугруппы P, состоящая из сократимых элементов, и пусть существует полугруппа $\bar{P}$ левых частных полугруппы P относительно M (РЖМат, 1957, 2929). Доказано, что если в левом P-группоиде G из $\alpha u = \alpha u_1$ ($\alpha \in M$, $u, u_1 \in G$) следует $u = u_1$, то существует (с точностью до изоморфизма единственный) такой левый $\bar{P}$-группоид $\bar{G}$, что $G \subset \bar{G}$ и $\bar{G} = \bar{P}G$. Каждый элемент группоида $\bar{G}$ можно представить в виде $\alpha^{-1}u$, $\alpha \in M$, $u \in G$. Аналогичный результат имеет место и в случае, когда P — кольцо, а M — его мультипликативная подполугруппа, не содержащая делителей нуля. Л. М. Глускин

3815. Об одном классе группоидов. Девиде (Über eine Klasse von Gruppoiden. Devidé Vladimir), Glasnik mat. fiz. i astron., 1955, **10**, № 4, 265—286 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Множество S, в котором определена операция умножения, называется C-группой, если 1) существуют такие подстановки φ, ψ, χ множества S, что для всех a, b, $c \in S$ имеет место соотношение $(ab)c = \varphi a\,(\psi b \cdot \chi c)$; 2) существует такой элемент m и такая подстановка λ, что $ma = \lambda a$ для любого $a \in S$; 3) для любого элемента $a \in S$ существует такой элемент $\bar{a} \in S$, что $a\bar{a} = m$. Показано, что в любой C-группе S уравнения $ax = b$, $ya = b$ разрешимы для любых a, $b \in S$, причем первое уравнение разрешимо однозначно.

C-группа, в которой однозначно разрешимо и уравнение $ya = b$ называется D-группой.

Неизвестно, не является ли любая C-группа D-группой. D-группы, для которых подстановки φ, ψ и χ являются автоморфизмами, называются A-группами.

A-группа тогда и только тогда является группой, когда $\varphi = \psi = \chi = 1$. Это условие, в частности, выполнено, если A-группа содержит единицу. Любая A-группа относительно операции $a \cdot b = \varphi^{-1}a \cdot \chi b$ является группой. Оказывается, что тем самым устанавливается взаимно однозначное (с точностью до изоморфизма) соответствие между A-группами и группами. Часть результатов (§ 2, теоремы 4 и 5) непосредственно следуют из одной теоремы Алберта (Albert A. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **54**, 507—519, теорема 2). В. Д. Белоусов

3816. Один класс простых луп Муфанг. Пейдж (A class of simple Moufang loops. Paige Lowell J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 471—482 (англ.)

Пусть M — множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}$, где a, b — элементы некоторого поля F, а α, β — трехмерные векторы на F, для которых $ab - \alpha\beta = 1$. Относительно умножения

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \gamma \\ \delta & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + \alpha\delta & a\gamma + \alpha d - \beta \times \delta \\ \beta c + b\delta + \alpha \times \gamma & \beta\gamma + bd \end{pmatrix},$$

множество M является неассоциативной лупой Муфанг (т. е. лупой, удовлетворяющей тождественным соотношениям $xy \cdot zx = x(yz \cdot x)$; $x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z$; $(zx \cdot y)x = z(x \cdot yx)$). Оказывается, что фактор-лупа лупы M по ее центру является простой неассоциативной лупой Муфанг. Если $F = GF(p^n)$, то порядок этой фактор-лупы равен $\frac{(p^{4n}-1)\,p^{3n+\varepsilon}}{2}$, где $\varepsilon = 0$, если $p > 2$ и $\varepsilon = 1$, если $p = 2$. В. Д. Белоусов

3817. Об одном классе коммутативных отношений конгруэнтности на лупах. Кауэлл (Concerning a class of permutable congruence relations on loops. Cowell W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 583—588 (англ.)

Отношение конгруэнтности θ на лупе G называется квазинормальным, если из $y\theta x$ следует, что $y = x\pi(k_1)\pi(k_2)\ldots\pi(k_n)$, где $\pi(k_1), \ldots, \pi(k_n)$ — операторы левого или правого регулярного представления лупы G соответствующим элементам $k_1, \ldots, k_n$ ядра k. Оказывается, что квазинормальное отношение конгруэнтности перестановочно с любым другим отношением конгруэнтности.

Лупа G называется обладающей ослабленным обратным свойством, если для любых элементов a, x, y, связанных соотношением $ax = ya$, в полугруппе, порожденной всеми операторами правого и левого регулярных представлений, существуют такие преобразования σ, что $a\sigma = 1$ и, либо $(ax)\sigma = x$, либо $(ya)\sigma = y$.

Примерами луп с ослабленным обратным свойством являются IP-лупы Брука и лупы со специальным свойством Арци (РЖМат, 1956, 5125). Оказывается, что на лупе, обладающей ослабленным обратным свойством, все отношения конгруэнтности квазинормальны.

Группоид M, в котором существует единица I и уравнения $ax = b$, $ya = b$ имеют по крайней мере одно решение, автор называет образом лупы. Известно (Bates G. E., Kiokemeister F., Bull. Amer. Math. Soc. 1948, 54), что только такие группоиды могут быть гомоморфными образами луп. Элемент $z \in M$ называется левой локальной единицей для элемента $a \in M$, если $z \neq 1$ и $za = a$ для любого элемента $a \in M$. Доказывается, что гомоморфный образ M лупы G по отношению θ тогда и только тогда не имеет левых локальных единиц, когда любой класс конгруэнтности имеет вид Kx, где K — ядро отношения конгруэнтности θ. Тем самым положительно решена проблема 32 Биркгофа. В. Д. Белоусов

3818. Аддитивные и мультипликативные лупы тернарных колец. Хьюз (Additive and multiplicative loops of planar ternary rings. Hughes D. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 973—980 (англ.)

Непустое множество R, в котором определена тернарная операция $F(a, b, c) = d$, называется тернарным кольцом, если: (A) Существует такой элемент $0 \in R$, что $F(a, 0, c) = F(0, b, c) = c$ для любых $a, b, c \in R$. (B) Существует такой элемент $1 \neq 0$, что $F(a, 1, 0) = F(1, a, 0) = a$ для любого $a \in R$. (C) Уравнение $F(x, a, b) = F(x, c, d)$ однозначно разрешимо для любых $a, b, c, d \in R$, если только $a \neq c$. (D) Уравнение $F(a, b, x) = c$ однозначно разрешимо для любых $a, b, c \in R$. (E) Система уравнений $F(a, x, y) = b$, $F(c, x, y) = d$ разрешима для любых $a, b, c, d \in R$, если только $a \neq c$. С каждым тернарным кольцом связаны две лупы: аддитивная лупа R с единицей 0 относительно операции $a + b = F(1, a, b)$ и мультипликативная лупа $R^* = R \setminus 0$ относительно операции $ab = F(a, b, 0)$. Рассматривается вопрос о существовании тернарного кольца, с данными аддитивной и мультипликативной лупами. Оказывается, что если R счетно, то этот вопрос решается положительно.

Тернарное кольцо называется линейным, если операция F имеет вид: $F(a, b, c) = ab + c$. Доказано существование линейного тернарного кольца, аддитивная лупа которого изоморфна наперед заданной счетной группе. В. Д. Белоусов

3819. Обобщенные груды, приводимые к обобщенным группам. Вагнер В. В., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 235—253

Полугрудой называется множество K с тернарной операцией $[k_1k_2k_3]$, удовлетворяющей условию:

$$[[k_1k_2k_3]\,k_4k_5] = [k_1\,[k_4k_3k_2]\,k_5] = [k_1k_2\,[k_3k_4k_5]].$$

Если, кроме того, для любых $k_1, k_2, k_3 \in K$ выполнены условия:

$$[k_1k_1k_1] = k_1,\ [[k_1k_2k_2]\,k_3k_3] = [[k_1k_3k_3]\,k_2k_2],$$

$$[k_1k_1\,[k_2k_2k_3]] = [k_2k_2\,[k_1k_1k_3]],$$

то полугруда называется обобщенной грудой. Любая обобщенная группа G, т. е. полугруппа, в которой все идемпотенты перестановочны и для каждого $g \in G$ существует такой элемент $g^{-1} \in G$, что

$$gg^{-1}g = g,\ g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}$$

(доказывается, что элемент g^{-1} определен однозначно) является обобщенной грудой относительно тернарной операции

$$[g_1g_2g_3] = g_1g_2^{-1}g_3.$$

Если в обобщенной груде K можно определить бинарную операцию, относительно которой она будет обобщенной группой, так, что заданная в K тернарная операция выражается через бинарную операцию указанным выше образом, то про K говорится, что она приводится к обобщенной группе. В работе установлены необходимые и достаточные условия возможности такого приведения. Обобщенная группа, к которой приводится обобщенная груда K, с точностью до изоморфизма определена однозначно.

Е. С. Ляпин

3820 Д. Группы с заданным числом классов неинвариантных Π_α-подгрупп. Торопов Е. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Гомель, 1956

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3821. Арифметика и классы дивизоров на алгебраическом многообразии. Нерон (代數的多樣體上の因子類と整數 論について. Néron A.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 234—236 (япон.)

Резюме лекции.

3822. Обобщение комплексного умножения. Вейль (虛數乘法の數張. Weil A.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 220—222 (япон.)

Резюме доклада.

3823. О комплексном умножении. Симура (虛數乘法について. 志村五郎), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 217—218 (япон.)

Резюме доклада.

3824. Обобщение теоремы о главном роде. Дёринг (Principal genus theorem の一般化について. Deuring M.). 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 246 (япон.)

Резюме доклада.

3825. Кратности пересечений. Серр (Multiplicity of intersections. Serre J.-P.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 257—259 (япон.)

Резюме лекции.

3826. Одно предположение о группах когомологий полей алгебраических чисел и его доказательство в одном специальном случае. Накаяма (代數數體の cohomology について の予想とその特別な場合の證明. 中山正), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 216 (япон.)

Резюме доклада.

3827. Когомологии функциональных полей и некоторых других алгебр. Зелинский (函數體およびその他の多元環のコホモロジー. Zelinsky D.), 數學 Сугаку, 1956, 7, № 4, 215 (японск.)
Резюме доклада.

3828. Об абелевых алгебрах. Поллак Д., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 14, 145—156

Пусть K/k — конечное абелево расширение с группой Галуа $G = \{\sigma_1\} \times \cdots \times \{\sigma_m\}$. Доказано, что скрещенное произведение поля K/k с его группой Галуа однозначно определено заданием системы таких отличных от нуля элементов α_i, $1 \leqslant i \leqslant m$; β_{ji}, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, поля K, что:

$$1)\ \alpha_i^{\Delta_i} = 1; \quad 2)\ \alpha_j^{\Delta_i} = N_j(\beta_{ji}); \quad 3)\ \alpha_i^{-\Delta_j} = N_i(\beta_{ji});$$

$$4)\ \beta_{ki}^{\Delta_j} = \beta_{kj}^{\Delta_i}\beta_{ji}^{\Delta_k}\ (i < j < k),$$

где $\Delta_i = \sigma_i - 1$, $N_i(x) = N_{K/k_i}(x)$, k_i — подполе, принадлежащее подгруппе $\{\sigma_i\}$.

Две системы элементов $\{\alpha_i, \beta_{ji}\}$ и $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_{ji}\}$, удовлетворяющие условиям 1) — 4), тогда и только тогда определяют изоморфные алгебры, когда существуют такие элементы $c_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant m$, что 5) $\bar{\alpha}_i = \alpha_i N_i(c_i)$, 6) $\bar{\beta}_{ji} = \beta_{ji} c_j^{\Delta_i} c_i^{-\Delta_j}$.

Примечание референта. Как известно, класс изоморфных скрещенных произведений поля K/k с его группой Галуа определяется заданием некоторого двумерного класса когомологий группы G над мультипликативной группой поля K. Условия автора 1) — 4) описывают как раз соответствующие двумерные коциклы, а условия 5), 6) описывают гомологичность двух коциклов. Это описание коциклов и кограниц конечных абелевых групп (даже над любым модулем) было ранее получено Шрейером (Schreier O., Monatsh. Math. und Phys., 1926, 34, 165—180; см. также формулу (19) статьи Таннака (РЖМат, 1955, 4902). Таким образом новых результатов работа не содержит. З. И. Боревич

3829. Группы Галуа, действующие на мультипликативных группах локальных полей. Ивадзава (局所體の乘法羣に作用する Galois 羣. 岩澤健吉), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 204—205 (японск.)
Резюме доклада.

3830. Теория кратности в локальных кольцах. Нагата (局所環における重複度の理論. 永田雅宜), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 237—238 (японск.)
Резюме доклада.

3831. Общий закон взаимности и новое обоснование теории полей классов. Лапин А. И., Изв. АН СССР, сер. матем. н., 1954, 18, № 2, 355—378

Работа содержит новое обоснование теории полей классов для полей K/k, группы Галуа которых являются прямыми произведениями циклических групп одного и того же нечетного простого порядка l в предположении, что основное поле k содержит корни степени l из 1. Теория полей классов рассматривается как теория двойственная к теории порождения поля K радикалами. Двойственность устанавливается при помощи скалярного произведения $(\alpha, \mathfrak{A}) = \prod (\alpha, \mathfrak{A}_\mathfrak{p})$, где α — число, $\mathfrak{A}$ — идеальный элемент поля k и $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ — $\mathfrak{p}$-адические компоненты. Символ норменного вычета определяется с помощью конструкции, предложенной референтом (Матем. сб., 1950, 26, № 1, 103 — 146). На этом пути обоснования теории полей классов основной трудностью является доказательство закона взаимности, т. е. того, что $(\alpha, \mathfrak{A}) = 1$, если $\mathfrak{A}$ — главный элемент. Автор доказывает этот закон взаимности, основываясь на теории родов в применении к полю $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$, где μ является произведением двух простых гиперпримарных чисел. И. Р. Шафаревич

3832. Применение полей Галуа в теории автоматических механизмов. III. Схемы с поляризованными реле. Моисил (Intrebuinţarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. III. Scheme cu relee polarizate. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 959—963 (рум.; рез. русс., франц.)

Для описания работы схем, содержащих электромагнитные реле, вводятся переменные ξ^+, ξ^- (переменная ξ^+ указывает на прохождение тока через одну обмотку, а ξ^- — через вторую) и переменные x^-, x^0, x^+, соответствующие трем возможным положениям якоря поляризованного реле. Характеристические уравнения для поляризованного реле имеют вид:

$$x_{N+1}^+ = \xi_N^+(\xi_N^- + 1), \quad x_{N+1}^- = \xi_N^-(\xi_N^+ + 1),$$

$$x_{N+1}^0 = \xi_N^+(\xi_N^- + 1). \qquad (1)$$

Пусть $\xi = \xi^+ + \varepsilon\xi^-$, $z = x^+ + \varepsilon x^-$,
где ε — такой элемент поля Галуа GF (2^2), что $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Тогда уравнения (1) можно записать в следующем виде $z_{N+1} = (\varepsilon + 1)\xi_N^3 + \varepsilon\xi_N^2$.

Аналогично описываются схемы с n поляризованными реле (с помощью поля Галуа GF (2^{2n})).
В. М. Остиану

3833. О подполях гиперэллиптического поля алгебраических функций. Дородное А. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 116, № 5, 7—9

Показывается, что гиперэллиптическое поле алгебраических функций одной переменной рода $r > 1$ над алгебраически замкнутым полем констант, обладающее преобразованием в себя с периодом n, содержит подполе рода $r_1 \geqslant 2$, если n нечетно и $\left[\frac{2r+2}{n}\right] > 4$ или если $n = 2^m n_1$ (где $n_1 > 1$ — нечетно) и либо $m > 1$, либо $m = 1$, $\left[\frac{2r+2}{n}\right] > 1$. В. В. Морозов

3834. Некоторые замечания о теореме Люрота. Самюэль (Some remarks on Lüroth's theorem. Samuel Pierre), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, A27, № 3, 223—224 (англ.)

Пусть K' и K'' — расширения бесконечного поля k, порождаемые конечным числом образующих и имеющих одну и ту же размерность. Доказано, что если для некоторой системы $(t) = (t_1, \ldots, t_n)$ независимых переменных над полями K' и K'' имеет место равенство $K'(t) = K''(t)$, то K' и K'' являются изоморфными расширениями поля k. С помощью этой теоремы доказано, что любое подполе чисто трансцендентного расширения бесконечного поля k, содержащее поле k и имеющее размерность 1, является чисто трансцендентным над k. Этот результат получен ранее Игуса (Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1951, 26) методами алгебраической геометрии. Утверждается, что для его справедливости условие бесконечности поля k несущественно. А. И. Узков

3835. Бирациональные преобразования полиномиальных идеалов. Гребнер (Die birationalen Transformationen der Polynomideale. Gröbner W.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 4, 266—286 (нем.)

Однородные простые идеалы $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ кольца многочленов $K[x_0 \ldots x_n]$ называются бирационально эквивалентными, если соответствующие им алгебраические многообразия бирационально эквивалентны. В этом случае существует обратимое (в естественном смысле) рациональное преобразование, переводящее $\mathfrak{p}_1$ в $\mathfrak{p}_2$; это преобразование называется бирациональным преобразованием $\mathfrak{p}_1$ в $\mathfrak{p}_2$. Доказывается, что любое бирациональное преобразование разлагается в произведение одного преобразования Веронезе, одного проективного преобразования и некоторого числа проектирований. И. Р. Шафаревич

3836. Теория Галуа для некоммутативного случая. Зелинский (非可換 Galois 理論. Zelinsky Daniel), 數學, Сугаку, 1956, 8, № 1, 12—16 (япон.)

Резюме лекции.

3837. Единицы фиксированных точек алгебр с инволюцией. Раманатхан (Involution のある多元環の不動 點の單數. Ramanathan K. G.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 225—227 (япон.)

Резюме доклада.

3838. Алгебры с инволюцией. Раманатхан (Algebras with involutions. Ramanathan K. G), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 252—253 (япон.)

Резюме доклада.

3839. Замечание об алгебрах со строго неограниченным числом представлений. Йосии (Note on algebras of strongly unbounded representation type. Yoshii Tensho), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 6, 383—387 (англ.)

Приведены два новых условия, достаточных для того чтобы ассоциативная алгебра с единицей над алгебраическим замкнутым полем была алгеброй со строго неограниченным числом представлений (РЖМат, 1956, 7217). З. И. Боревич

3840. Замечание об алгебрах с ограниченными степенями представлений. Йосии (Note on algebras of bounded representation type. Yoshii Tensho), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 7, 441—445 (англ.)

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над алгебраически замкнутым полем. Доказано, что если радикал алгебры A является нулевой алгеброй, а степени всех ее неприводимых представлений ограничены в совокупности, то алгебра A обладает только конечным числом неэквивалентных неприводимых представлений. З. И. Боревич

3841. Представления алгебр Дюфена—Кеммера. Кейс (Representations of the Duffin—Kemmer algebras. Case K. M.), Phys. Rev, 1956, 101, № 1, 439—448 (англ.)

Алгеброй Дюфена—Кеммера размерности n называется алгебра, порожденная n величинами $\beta(\mu)$, удовлетворяющими соотношениям: $\beta(\mu)\beta(\nu)\beta(\rho) + \beta(\rho)\beta(\nu)\beta(\mu) = \delta_{\mu\nu}\beta(\rho) + \delta_{\rho\nu}\beta(\mu)$. Неприводимые представления этой алгебры были впервые описаны Кеммером (Kemmer N., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1943, 39, 189). Автор изучает представления алгебры Дюфена—Кеммера с точки зрения теории спиноров. Показано, что применение (при четном n) метода слияния де-Бройля (de Broglie L., Théorie generale des particules à spin (Méthode de fusion), Gauthier—Villars, Paris, 1943) равносильно рассмотрению правых и левых регулярных представлений спинорной алгебры. Именно, пусть $\gamma^{(1)}(\mu)$ и $\gamma^{(2)}(\mu)$ — два идентичных коммутирующих семейства неприводимых спинорных матриц, рассматриваемых соответственно как операторы левого и правого регулярного представления. Тогда операторы $\beta(i)$ выражаются в виде $\frac{1}{2}(\lambda_1\gamma^{(1)}(i) + \lambda_2\gamma^{(2)}(i))$, где коэффициенты λ_1, λ_2 принимают значения ± 1.

Используя вид матричных элементов получающихся представлений, автор выводит разложение их на неприводимые, определяет кратности собственных значений и т. п. При этом получаются все неприводимые представления алгебры Дюфена—Кеммера. Наличие так называемых «парных» представлений (при нечетном n) оказывается не только аналогией, но и следствием соответствующего факта для спинорных алгебр.

В заключение рассмотрен некоторый процесс редукции представлений от n к $(n-1)$. В качестве приложения рассматривается вопрос об упрощении волнового уравнения в форме Кеммера (состоящее в уничтожении компонент, не содержащих дифференцирования по времени). И. З. Розенкноп

3842. Кольца и поля. Велдкамп (Ringen en lichamen. Veldkamp G. R.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1956—1957, 44, № 1, 35—48; № 2, 49—66 (голл.)

3843. Замечание к одной работе Селе. Штейнфельд (Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele. Steinfeld Ottó), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 6, № 3—4, 479—484 (нем.; рез. русс.)

Показывается, как, зная нетривиальный левый идеал кольца R, построить нетривиальный правый идеал (существование такого правого идеала было известно раньше). Аналогичный вопрос рассматривается и для введенного автором понятия квазиидеала, т. е. подмодуля A кольца R, для которого $RA \cap AR \subseteq A$. Оказывается, что если кольцо R содержит нетривиальный квазиидеал, то в R существует нетривиальный левый и, следовательно, нетривиальный правый идеал. В. А. Андрунакиевич

3844. О представлениях алгебр Ли. Канно (On the representations of Lie algebras. Kanno Tsuneo), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 46—53 (англ.)

Доказано, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных неприводимых представлений разрешимой алгебры L над полем K характеристики 0 и максимальными идеалами кольца многочленов $K[x_1, \ldots, x_s]$, где s — размерность алгебры $L/[L, L]$ над полем K. Аналогичный результат доказан для нильпотентных алгебр Ли над полем характеристики $p > 0$. А. В. Сульдин

3845. Представления простых алгебр Ли с двумерными максимальными разрешимыми подалгебрами. Симония В. Т. (ორგანზომილებიან მაქსიმალურ ამოხსნად ქვეალგებრებიან ლის მარტივ ალგებრათა წარმოდგენები სიმონია მ.), Сообщ. АН Груз ССР, 1956, 17, № 5, 393—400

Найдены формулы, задающие неприводимые представления алгебр A_2, B_2 и G_2. В отличие от общих формул И. М. Гельфанда и М. Л. Цетлина (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 6), полученные формулы не содержат иррациональностей. А. В. Сульдин

3846. Кватернионы как 4-мерные векторы. Уокер (Quaternions as 4-vectors. Walker Marshall J.), Amer. J. Phys., 1956, 24, № 7, 515—522 (англ.)

3847. Альтернативные тела произвольной характеристики. Штеккер (Alternative Divisionsringe beliebiger Charakteristik. Stöcker Claus), Math. Ann., 1956, 132, № 1, 17—42 (нем.)

Заново доказывается, что всякое неассоциативное альтернативное тело является алгеброй Кэли—Диксона над своим центром. Доказательство основано на тех же идеях, что и предлагавшиеся ранее (Скорняков Л. А., Укр. матем. ж., 1950, 2, № 1, 70—85; № 3,

94—99; Bruck R., Kleinfeld E., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 878—890; Kleinfeld E., Proc. Nat. Acad. Sci., 1951, 37, 818—820), но в отличие от них, пригодно для случая любой характеристики.

Л. А. Скорняков

3848. Топологический подход к структурной теории неассоциативных колец. Беренс (Ein topologischer Beitrag zur Strukturtheorie nichtassoziativer Ringe. Behrens Ernst-August), Math. Ann., 1955, 129, № 3, 297—303 (нем.)

Замыканием $\overline{A}$ непустого множества A простых идеалов кольца $\mathfrak{o}$ называется множество простых идеалов, содержащих пересечение всех идеалов из A. Этим определением множество простых идеалов кольца $\mathfrak{o}$ превращается в топологическое T_0-пространство P. Если кольцо $\mathfrak{o}$ содержит единицу, то пространство P бикомпактно и его подпространства G, состоящее из сверхмодулярных (РЖМат, 1957, 2112) идеалов, и $M \subset G$, состоящее из максимальных идеалов, замкнуты. Пространствам P, G, M соответствуют радикалы в смысле Мак-Коя, Беренса (РЖМат, 1955, 4884) и Смайли. Два из этих радикалов тогда и только тогда совпадают, когда меньшее из соответствующих пространств плотно в другом. Полупростое кольцо с единицей тогда и только тогда разлагается в прямую сумму двух полупростых колец, когда соответствующее пространство (P, G или M) несвязно. Л. А. Скорняков

3849. Об архимедовски упорядоченных системах с двумя операциями. Таллини (Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei. Tallini Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1955, 18, № 4, 367—373 (итал.)

Доказано, что архимедовски упорядоченное кольцо (не обязательно ассоциативное) с единицей изморфно некоторому подкольцу поля действительных чисел. Этот результат не нов (См. РЖМат, 1956, 6457). Попутно выясняются некоторые зависимости между теми или иными аксиомами. Например, показано, что коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом упорядоченного кольца. Ю. И. Соркин

3850. Две теоремы о вложении для конечных структур. Хартманис (Two embedding theorems for finite lattices. Hartmanis Juris), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 571—577 (англ.)

Если в множестве S выделены подмножества, называемые прямыми, причем каждая прямая содержит не менее двух точек, а две различные точки одновременно принадлежат одной и только одной прямой, то говорят, что на S задана геометрия G. Подмножество T множества S называется подпространством геометрии G, если вместе со всякими двумя различными точками оно содержит соединяющую их прямую. Совокупность $C(G)$ всех подпространств является структурой относительно включения. Оказывается, что всякая конечная структура изоморфна структуре подпространств некоторой конечной геометрии (т. е. геометрии на конечном множестве). Если G и H — две геометрии на S, и для каждой прямой k геометрии H существует такая прямая l геометрии G, что $k \subset l$, то говорят, что $G \geqslant H$. Это определение превращает множество $LG(S)$ всех геометрий на S в структуру. Оказывается, что существует такая геометрия K, что структура $C(K)$ изоморфна структуре $LG(S)$. Если S конечно, то для любой геометрии G на S структуру $L_1 = C(G)$ можно вложить в структуру $LG(R)$, где множество R конечно. Л. А. Скорняков

3851. Теорема Жордана—Гёльдера в структурах без условия конечности цепей. Вильгельм Вацлав, Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 1, 29—49 (рез. англ.)

Совокупность a/b всех элементов x структуры S, удовлетворяющих условию $a \geqslant x \geqslant b$, называется в работе квоциентом. Квоциент, состоящий из двух и только двух элементов, называется простым. Квоциент a/b называется вниз прямо подобным квоциенту c/d (обозначение $a/b \underset{d}{\sim} c/d$), если $a = b \vee c$ и $d = b \wedge c$. Двойственным образом определяются вверх прямо подобные квоциенты (обозначение: $a/b \overset{d}{\sim} c/d$). Квоциенты a/b и c/d называются снизу просто подобными, если существует такой квоциент x/y, что $a/b \underset{d}{\sim} x/y \overset{d}{\sim} c/d$. Структура S называется удовлетворяющей нижнему условию простых квоциентов, если любой простой квоциент вниз прямо подобен лишь простым квоциентам. Цепь, соединяющая элементы a и b, называется насыщенной, если она не является собственной частью никакой цепи, соединяющей эти элементы. Рассматриваются следующие условия, накладываемые на структуру S: 1) каждый квоциент структуры S является полной структурой; 2) структура S удовлетворяет условию 1) и для любой цепи $\{a_i\}_0^\rho$, $i \in M$, любого элемента $c \in S$, и любого индекса $\lambda \in M$, $\lambda \neq 0$ имеет место равенство

$$\bigvee_{\substack{i \in M \\ i \prec \lambda}} (a_i \wedge c) = \left(\bigvee_{\substack{i \in M \\ i \prec \lambda}} a_i\right) \wedge c;$$

3) для любой насыщенной цепи $\{a_i\}_0^\rho$, $i \in M$, и любых двух элементов a_α, $a_\beta \in \{a_i\}_0^\rho$, $a_\alpha < a_\beta$, существуют в $\{a_i\}_0^\rho$ такие элементы $a_\varkappa$, a_λ, что $a_\alpha \leqslant a_\varkappa < a_\lambda \leqslant a_\beta$, причем квоциент $a_\lambda/a_\varkappa$ является простым. Для каждой насыщенной цепи $\{a_i\}_0^\rho$, $i \in M$, не имеющей повторений для каждого простого квоциента a_γ/b и для каждого индекса $\lambda \in M$, $\lambda \neq \rho$, имеет место равенство

$$\bigwedge_{\substack{i \in M \\ \lambda \prec i}} (a_i \vee b) = \left(\bigwedge_{\substack{i \in M \\ \lambda \prec i}} a_i\right) \vee b.$$

Основной результат: В структуре S, удовлетворяющей условиям 2), 3), тогда и только тогда имеет место теорема Жордана—Гёльдера с нижним простым подобием квоциентов, когда S удовлетворяет нижнему условию простых квоциентов и условию V.

Ю. И. Соркин

3852. О некоторых парах отображений модулярных структур. Тандай (On certain pairs of mappings of modular lattices. Tandai Kwoichi), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1955, 5, № 2, 83—86 (англ.)

Показано, что некоторые результаты Фукухара об эндоморфизмах векторных пространств (РЖМат, 1957, 2019) являются теоремами теории структур.

Е. Н. Мочульский

3853. Бинарное кодирование и изометрические преобразования конечной метрической булевой алгебры. Ватанабэ (Binary coding and isometric transformations in a finite metric Boolean algebra. Watanabe Sigekatu), 電氣通信大學學報, Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1955, № 7, 17—40 (англ.; рез. япон.)

Как известно, любая конечная булева алгебра L является кардинальным произведением двухэлементных булевых алгебр $L_i = \{0, 1\}$, т. е. каждый элемент $a \in L$ может быть представлен в виде $a = (a_1,$

$a_2, \ldots, a_n$), где $a_i \in L_i$. Пусть $\| a \|$ — число отличных от нуля компонент a_i элемента $a \in L$. Формула $(a, b) = \| a + b \|$, где, как обычно, $a + b = (a \cap b') \cup (a' \cap b)$, определяет в L некоторую метрику. Оказывается, что для каждого изометрического относительно этой метрики преобразования T алгебры L существует такой элемент $a \in L$ и такая подстановка P индексов $1, 2, \ldots, n$, что $Ta = a + Pa$ для любого $a \in L$, где Pa — элемент, полученный из элемента a соответствующей перестановкой его компонент. Каждое изометрическое преобразование является гомоморфизмом по пересечениям. Множество всех изометрических преобразований алгебры L представляет собой группу. Подробно изучается строение этой группы (в частности, ее подгруппы, оставляющие инвариантным данный подмодуль $l \subset L$).

При бинарном кодировании приходится рассматривать такие подмножества $H(\rho) \subset L$, где $\rho \geqslant 3$, что $(a, b) \geqslant \rho$ для любых элементов $a, b \in H(\rho)$. Изучаются связи между подмножествами $H(\rho)$ и группами изометрических преобразований. Полученные результаты могут быть полезны для построения подмножеств $H(\rho)$. Л. М. Глускин

3854. Об алгебрах со свойством существования. Якубик (O existenčních algebrách. Jakubik Ján), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 1, 43—54 (словац.; рез. русс., англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс алгебр (алгебраических систем), числа аргументов основных операций которого ограничены и среди основных операций которого существует хотя бы одна операция с числом аргументов большим единицы. Пусть далее B — некоторое множество полиномов (определение полинома см., например, РЖМат, 1957, 209), построенных при помощи основных операций класса $\mathfrak{A}$. Класс $\mathfrak{A}$ называется классом алгебр со свойством существования, если для любого полинома $g(z, z_1, \ldots, z_n) \in B$ и для любой последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in S$, где S — произвольная алгебра класса $\mathfrak{A}$, существует единственный элемент $x \in S$, для которого $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$.

В работе доказано, что в классе алгебр со свойством существования имеются алгебры любой бесконечной мощности.

Говорят, что класс алгебр обладает свойством (N), если в нем содержится алгебра S, удовлетворяющая следующим условиям: для любого элемента $x \in S$ существуют на S такие отношения конгруэнтности R и R', что $xRyR'z$ для бесконечно многих пар $y, z \in S$, но в S не существует элемента u, для которого $xR'uRz$. Говорят, что класс алгебр обладает свойством (M), если не для любой алгебры S этого класса каждое отношение конгруэнтности на S определено любым из своих классов. В работе показано, что любой класс алгебр со свойством существования обладает свойствами (N) и (M). Так как каждая квазигруппа является алгеброй со свойством существования и так как на алгебре, удовлетворяющей условию (N) отношения конгруэнтности неперестановочны, то это утверждение обобщает результаты Тревизана (РЖМат, 1954, 5466) и Ван-Ши-цяна (РЖМат, 1954, 5477).

Алгебраическая система S, в которой основные операции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i})$ класса алгебр со свойством существования определены для некоторых последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (не обязательно для всех) и в которой уравнение $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ для любого полинома $g \in B$ имеет в S не более одного решения, называется частичной алгеброй со свойством существования.

В работе показано, что каждую частичную алгебру со свойством существования можно включить в алгебру того же класса. Показано также, что указанное Биркгофом (Теория структур, М., 1952, стр. 131, упражнение 3) необходимое и достаточное условие для перестановочности отношений конгруэнтности на алгебре, имеющей только одинарные операции, на самом деле является только достаточным.

А. А. Виноградов

3855 Д. Об алгебраической теории линейных мультидифференциальных полиномов. Левин (On the algebraic theory of linear multidifferential polynomials. Levin Frank. — Doct. diss. Univ. Cincinnati, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 8, 1407—1408 (англ.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

3856. Современное состояние теории релейных схем. Гаврилов М. А. В сб.: Телемеханиз. в нар. хоз-ве, М., АН СССР, 1956, 99—133

Излагаются основы теории релейных схем с примерами применения к устройствам телеуправления. Приведены основные соотношения алгебры релейных схем, основанной на алгебре логики. Рассмотрен анализ релейных схем и, в частности, числовой метод получения таблиц включений. Даются общие формулы преобразования релейных схем в целях их упрощения. Кратко освещены вопросы получения схем с мостиковыми соединениями и вентильными элементами. Отмечается, что иногда упрощение схемы получается за счет применения различных импульсных признаков. Изложен простой метод определения реализуемости таблиц включений и показано использование некоторых формул для перехода от таблиц включений к структурным формулам. Учет последовательности работы элементов многотактных схем позволяет проводить дополнительные упрощения схем при синтезе. Библ. 5 назв.

П. П. Пархоменко

3857. Состояние вопроса о минимальном числе структурных элементов в релейно-контактных схемах. Поваров Г. Н. В сб.: Телемеханиз. в нар. хоз-ве, М., АН СССР, 1956, 134—138

Излагается состояние вопроса оценки схем по числу контактов в них.

Оценка конкретных схем возможна только в простейших случаях. Вопрос оценки классов схем в ряде случаев решен, но это не дает оценки конкретных схем. Наиболее изучены контактные $(1, k)$-полюсники, условия проводимости которых могут быть заданы в виде последовательности k булевых функций n переменных. Задача схемной реализации заданной последовательности сводится к реализации ее базиса. Базисом заданной последовательности называется ее максимальная подпоследовательность, все члены которой отличны от 0 и 1 и попарно различны.

Наилучшая реализация наиболее сложного $(1, k)$-полюсника с n приемными элементами характеризуется функцией $L(k, n)$. $L(k, n)$ есть наименьшее число контактов, с которым реализуется любая последовательность k функций n переменных. Сложность данной последовательности (и реализующей ее схемы) количественно можно определить как отношение наименьшего числа контактов, с которым реализуется эта последовательность, к числу $L(k, n)$.

Теорема 1. Для любых действительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta \in (0, 1)$ и любого целого $T \geqslant 1$ найдется такое n_0, что при $n > n_0$ и $k \leqslant T 2^{2^n - 1}$

$$(1 - \varepsilon_1) \frac{k \cdot 2^n}{\log_2 k + n} < L(k, n) < (1 + \varepsilon_2) \frac{k 2^{n+2}}{\log_2 k + n}$$

и лишь не более $\delta A^{k}_{2^n,2^n-2}$ из базисных последовательностей k функций n переменных имеют сложность $\leqslant (1-\varepsilon_2)\frac{1}{4}$.

Теорема 2. Начиная с некоторого n_0 при $k \in [2^{2^{n-1}},\ n[2n2^{2^{n-1}}+2n(2n-2)2^{3\cdot 2^{n-2}}]]$ всегда

$$\frac{3}{2}k < L(k, n) < 4k$$

и сложность любой базисной последовательности k функций n переменных $\geqslant \frac{1}{4}$.

Теорема 3. Для любых действительных ε_1, $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ найдется такое n_0, что если $n > n_0$ и $k \in [n[2n2^{2^{n-1}}+2n(2n-2)2^{3\cdot 2^{n-2}}], 2^{2^n}-2]$, то $(1-\varepsilon_1)\times \frac{3}{2}k < L(k, n) < (1+\varepsilon_2)2k$ и сложность любой базисной последовательности k функций n переменных $\geqslant (1-\varepsilon_2)\frac{3}{4}$.

Знание поведения функции $L(k, n)$ позволяет установить, какое место занимают практические схемы во множестве всех возможных схем. Практические схемы реализуют функции упорядоченного типа, которые составляют ничтожную долю всех возможных функций. Синтез таких схем должен быть основан на использовании закономерностей, содержащихся в условиях проводимости. Библ. 11 назв.

П. П. Пархоменко

3858. К математической теории синтеза контактных $(1, n)$-полюсников. Поваров Г. Н., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 102—104

Излагаются и доказываются четыре теоремы о строении контактных $(1, k)$-полюсников. В теореме 1 сформулированы необходимые условия для того, чтобы проводимость между входом контактного $(1, k)$-полюсника и выходом, к которому присоединено не более двух ветвей того же многополюсника, не была функцией вида: $0, 1, \tilde{x}f$ или $\tilde{x}f + \tilde{y}g$, где $\tilde{z}$ означает z или $\bar{z}$.

На основании этой теоремы доказываются теоремы 2 и 3 о контактных цепях, присоединенных в $(1, k)$-полюснике к особому множеству выходов, называемых «классифицированными», и теорема 4, дающая оценку числа контактов в контактных $(1, k)$-полюсниках. Используя последнюю теорему, автор доказывает теоремы 2 и 3 из предыдущей работы (РЖМат, 1955, 4012).

В. И. Шестаков

3859. Применение исчислений высказываний для записи электрических схем. Роледер (Die Verwendung von Aussagenkalkülen zur Beschreibung elektrischer Schaltungen. Rohleder Hans), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 4, 304—309 (нем.)

Кратко рассматриваются методы синтеза контактных схем, в том числе методы М. А. Гаврилова и А. Свободы. Указываются на принципиальную возможность привлечения трехзначного исчисления высказываний для синтеза схем, содержащих как контакты, так и обмотки реле.

А. А. Архангельская

3860 Д. Исследование циклических релейно-контактных схем с однотипной структурой. Иванов В. И. Автореф. дисс. канд. техн. н. Ин-т автоматики и телемехан. АН СССР, М., 1956

3861 Д. Некоторые аналитические методы составления и преобразования релейно-контактных схем. Юрасов А. Н. Автореф. дисс. канд. техн. н. Всес. заоч. политехн. ин-т, М., 1956

3862 Д. Методика объективной оценки принципов построения релейных устройств АТС. Лазарев В. Г., Автореф. дисс. канд. техн. н. Моск. электротехн. ин-т связи, М., 1956

См. также: 3683, 3735, 3745, 3884, 4090, 4171, 4177, 4178, 4296, 4186, 4309, 4312—4314, 4329—4331, 4335, 4349, 4360—4362, 4390, 4392

ТОПОЛОГИЯ

3863. Об ориентированных графах. I. Ор (Studies on directed graphs, I. Ore Oystein), Ann. Math., 1956, **63**, № 3, 383—406 (англ.)

Рассматривается бинарное отношение R, определенное для некоторых упорядоченных пар элементов данного множества S. Такое отношение может быть представлено эквивалентно как ориентированный граф, который обозначается также через R. Число ребер, выходящих из вершины $v \in S$, обозначается через $\alpha(v)$, число входящих в v ребер — через $\alpha^*(v)$. Предполагается, что граф R локально конечен, т. е. числа $\alpha(v)$ и $\alpha^*(v)$ конечны для каждой вершины $v \in S$. Для произвольного конечного множества $A \subset S$ определяется разность $\delta(A) = k(A) - \mu^*_A(R(A))$, где $k(A) = \sum_{a\in A} k(a)$, $k(a)$ — произвольное целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k(a) \leqslant \alpha(a)$, $R(A)$ — множество всех таких элементов b, что aRb для некоторого $a \in A$, $\mu^*_A(V) = \sum_{v\in V}\mu^*_A(v)$, $\mu^*_A(v) = \min(k^*(v), \rho^*_A(v))$, $k^*(v)$ — произвольное целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k^*(v) \leqslant \alpha^*(v)$, $\rho^*_A(v)$ — число ребер, входящих в v из вершин множества A. Аналогично определяются еще три функции: дополнительная разность $\bar{\delta}(A) = \bar{k}(A) - \bar{\mu}^*_A(R(A))$, обратная разность $\delta^*(A) = k^*(A) - \mu_A(R^*(A))$, обратная дополнительная разность $\bar{\delta}^*(A) = \bar{k}^*(A) - \bar{\mu}_A(R^*(A))$, где $\bar{k}(v) = \alpha(v) - k(v)$, R^* — отношение, обратное отношению R, а остальные обозначения подобны приведенным выше.

Предполагается, что функции δ и $\bar{\delta}$ имеют точные верхние границы δ_0 и $\bar{\delta}_0$ соответственно. Оказывается, что точные верхние границы δ^*_0 и $\bar{\delta}^*_0$ функций δ^* и $\bar{\delta}^*$ совпадают с $\bar{\delta}_0$ и δ_0 соответственно. Изучаются различные свойства разностей и соотношения между ними, в частности изменение разности δ при добавлении или удалении одной вершины. Множества, для которых разность не возрастает при добавлении произвольной вершины, называются замкнутыми; множества, для которых разность не возрастает при удалении любой вершины, называются примитивными. Определяются еще некоторые типы множеств, выводятся их свойства. Рассматривается изменение функций δ и δ^* при удалении некоторого ребра.

Полученные результаты применяются к конечному графу R. Дается необходимое и достаточное условие

для существования подграфа, локальные степени которого равны заданным функциям $k(v)$ и $k^*(v)$. Дается необходимое и достаточное условие того, чтобы конечный ориентированный граф имел подграф первой степени; из этого условия следует, что каждый конечный регулярный граф n-й степени есть прямая сумма n подграфов первой степени (ориентированный граф называется регулярным степени n, если $\alpha(v) = \alpha^*(v) = n$ для каждой вершины $v \in S$).

Автор отмечает, что с некоторыми видоизменениями тот же метод может быть применен к вопросам, связанным с неориентированными графами.

И. Н. Врублевская

3864. Равномерно отделенные функции на равномерных пространствах и их приложения к теории нормальных пространств. Акваро (Funzioni reali uniformemente separate negli spazii uniformi ed applicazioni agli spazii normali. Aquaro Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 401—409 (итал.)

Пару действительных функций f, g, определенных на равномерном пространстве E, автор называет равномерно отделенной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая (равномерная) окрестность V диагонали пространства $E \times E$, что при $(x, y) \in V$ выполнено неравенство $f(x) < g(y) + \varepsilon$.

Основная теорема: Если пара f, g ограниченных функций равномерно отделена, то существует такая равномерно непрерывная функция h, что $f \leqslant h \leqslant g$ на E. Автор показывает, что из этого результата легко выводятся некоторые результаты референта и Тонга об отделении полунепрерывных функций и о продолжении равномерно непрерывных функций (Katětov M., Fundam. math., 1951, 38, 85—91; Tong H., Duke Math. J., 1952, 19, 289—292).

M. Katětov

3865. Об общих топологических пространствах, удовлетворяющих аксиоме строгого невозрастания. Чаррапико (Sugli spazi topologici generali soddisfacenti ad un assioma di non-crescenza ristretto. Ciarrapico Lucia), Rend. mat. e applic., 1955, 13, № 3—4, 282—293 (итал.)

Рассматриваются общие топологические пространства типа V, которые при переходе к сопряженной топологизации в смысле Жемона остаются V-пространствами (РЖМат, 1956, 5147), т. е. такие пространства, для которых выполнена аксиома строгого невозрастания $\overline{E} \subset \overline{E \cup F}$ и аксиома строгого невозрастания $\overline{E} \setminus E \supset \overline{E \cup F} \setminus (E \cup F)$. Показывается, что все такие пространства (и только они) получаются следующим построением: в произвольном множестве S фиксируем какое-нибудь подмножество H и для всех множеств $E \subset S$ полагаем $\overline{E} = E \cup H$. В изложении имеется несколько логических неточностей, в частности доказанное сначала для двух слагаемых соотношение $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$ применяется затем к сумме бесконечного числа множеств, во избежание чего Q и R на стр. 287 и 288 нужно считать не точками, а множествами (а P — точкой); кроме того, условия $A \not\subset \overline{E}$ и $A \not\subset \overline{F}$ на стр. 286 и условия $S \neq Q$ и $S \neq \overline{P} \setminus P$ на стр. 287 нужно заменить соответственно условиями $A \cap \overline{E} = \varnothing$, $A \cap \overline{F} = \varnothing$, $S \cap Q = \varnothing$, $S \cap (\overline{P} \setminus P) = \varnothing$ (имеется ряд более мелких погрешностей).

М. Ф. Бокштейн.

3866. Аксиомы отделимости в одном классе топологических пространств. Помилио (Gli assiomi di separazione in una classe di spazi topologici. Pomilio Isabella), Rend. mat. e applic., 1955, 13, № 3—4, 391—405 (итал.)

При переходе к сопряженной топологизации пространства (РЖМат, 1956, 5147) каждое топологическое понятие порождает сопряженное понятие. Например понятием, сопряженным к внутренности множества будет край этого множества, и наоборот; понятием сопряженным к границе множества, будет сумма внутренностей самого множества и его дополнения сопряженными к замкнутым множествам будут всюду плотные множества, а сопряженными к открытым множествам — множества без внутренних точек. Каждому предложению об исходном пространстве будет соответствовать некоторое сопряженное предложение о сопряженном пространстве. Автор находит в частности, какой вид будут иметь высказывания сопряженные аксиомам отделимости T_1, T_2, T_3, T_4. Пользуясь этим, он исследует выполнимость аксиом отделимости в пространствах, сопряженных к пространствам типа V (т. е. к окрестностным); здесь аксиомы T_1 и T_3 не могут иметь места, за исключением пространств с дискретной топологией, а и аксиомы T_4 всегда следует аксиома T_2.

М. Ф. Бокштейн

3867. Пространства разложения и свойства отделимости. Шимрат (Decomposition spaces and separation properties. Shimrat M.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 128—129 (англ.)

Доказывается, что всякое топологическое пространство гомеоморфно некоторому пространству разбиения некоторого хаусдорфова пространства.

А. С. Пархоменко

3868. Локальная связность и расширение пространств. Банашевский (Local connectedness of extension spaces. Banaschewski Bernhard), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 395—399 (англ.)

Каждая точка u расширения E^* данного топологического пространства E определяет фильтр множеств $U \cap E$, где U пробегает все окрестности точки u в E^*. Используя свойства этих фильтров, автор дает характеристику локально связных расширений E^*.

Будем называть «связным» такой фильтр, который всегда содержит по крайней мере одно из любых двух непересекающихся открытых множеств. Справедлива теорема: Пусть E^* — такое расширение топологического пространства, что все соответствующие фильтры связны. Пространство E^* локально связно тогда и только тогда, когда E является локально связным и базис каждого из описанных выше фильтров состоит из открытых множеств.

Из этой теоремы следует, что ни одно из расширений kE (Катетова), $\alpha' E$ (Александрова) и βE (Чеха) не будет локально связным, если не является локально связным пространство E. Аналогичным способом можно показать, что βE не будет локально связным в случае локально компактного пространства E несчетного в бесконечности (denumerable at infinity).

V. Pták

3869. Непрерывные образы гильбертова пространства. Хухунайшвили Г. Е., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 2, 275—288

Дается описание непрерывных образов гильбертова пространства. Для того чтобы метрическое пространство E было непрерывным образом гильбертова пространства, необходимо и достаточно выполнения двух условий 1) и 2) (теорема 1), а также необходимо и достаточно выполнения двух условий 1) и 3) (теорема 2): 1) E является линейно связным сепарабельным абсолютным A-множеством; 2) для любого $\varepsilon > 0$ пространство E представимо в виде суммы не более чем счетного числа линейно связных множеств диаметры которых меньше ε;

3) произвольное открытое в E множество можно представить в виде суммы не более чем счетного числа линейно связных множеств.

Из этих теорем вытекает, что пространство C является непрерывным образом гильбертова пространства. Однако поставленный Банахом вопрос о гомеоморфности пространств C и l_2 остается открытым. А. Д. Тайманов

3870. Рациональные точки в гильбертовом пространстве. Робертс (The rational points in Hilbert space. Roberts J. H.), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 489—491 (англ.)

Строится гомеоморфное отображение h (одномерного) множества R рациональных точек гильбертова пространства H на плоское множество, а именно, на подмножество «канторова веера» D, который состоит из отрезков, соединяющих точку $p=\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ с точками канторова множества C, лежащего на отрезке $[0, 1]$ оси Ox. Множество $h(R)$ имеет не более одной точки на каждом из отрезков px, $x\in C$ и является вполне несвязным, но становится связным после присоединения к нему точки p (теорема 2). Отображение h строится следующим образом. Формула $(g(x))_i=x/i(1+|x_i|)$ определяет взаимно однозначное непрерывное отображение g гильбертова пространства H в гильбертов параллелепипед I_ω, переводящее множество R в множество R' рациональных точек гильбертова параллелепипеда. Пусть α — гомеоморфное отображение нульмерного множества R' на подмножество канторова дисконтинуума C. Чтобы получить отображение h, ставим в соответствие точке $x\in R$ точку множества D, которая лежит на отрезке, соединяющем p с точкой $\alpha(g(x))$, и имеет ординату $y=\|x\|/(1+\|x\|)$, где $\|x\|$ — норма точки x.

Кроме того доказано, что отображение $f: H\to I_\omega$, определяемое формулами

$$(f(x))_1=\frac{\|x\|}{1+\|x\|}, \qquad (f(x))_{i+1}=\frac{1}{i+1}\frac{x_i}{1+|x_i|},$$

$$i=1, 2, \ldots,$$

является гомеоморфизмом (теорема 3).

При доказательстве теорем 2 и 3 используется следующая лемма: Предположим, что $x, x^1, x^2\ldots$— такие точки гильбертова пространства, что $\|x^n\|\to\|x\|$ и $x_i^n\to x$ для каждого фиксированного i. Тогда последовательность $x^1, x^2, \ldots$ сходится в H к точке x. А. С. Пархоменко

3871. О полноте пространства подмножеств. Терехова Н. П., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 1, 73—75

Через $\hat{R}$ обозначается пространство всех ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства R с метрикой Хаусдорфа. Доказано, что пространство $\hat{R}$ полно тогда и только тогда, когда R полно.

Этот результат известен. Полнота пространства компактных подмножеств была впервые доказана Вьеторисом (Vietoris, Monatsh. Math. und Phys., 1923, 33, 49—62); для общего случая ограниченных замкнутых подмножеств результат имеется в работе Майкла (Michael, Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, № 1, 152—182). А. Д. Тайманов

3872. Об одном методе полной метризации некоторых пространств компактных множеств. Куратовский (Sur une méthode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles compacts. Kuratowski K.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 114—138 (франц.)

Пусть Y — полное пространство. Автор применяет введенный им ранее метод (РЖМат, 1956, 7225) к полной метризации (т. е. введению такой метрики, в которой рассматриваемое пространство является полным) следующих пространств: 1) пространства $LC^n(Y)$ компактных подмножеств пространства Y, локально связных в гомотопическом смысле в размерностях $\leqslant n$; 2) пространства $lc^n(Y)$ компактных подмножеств пространства Y, локально связных в гомологическом смысле в размерностях $\leqslant n$; 3) пространства $P(X, Y)$ непрерывных функций, определенных на компактных подмножествах полного пространства X со значениями в пространстве Y; 4) пространства $P(Y)$ локально связных подконтинуумов пространства Y.

Следующая теорема дает возможность непосредственно ввести полную метрику в каждом из этих пространств. Пусть метрическое пространство X является (L)-пространством (Фреше) относительно сходимости, обозначаемой через $x_i\to x$, и пусть эта сходимость влечет за собой сходимость, определяемую с помощью расстояния, имеющегося в X (если $x_i\to x$, то $\lim_{i\to\infty}|x_i-x|=0$).

Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность действительных функций, определенных на X и непрерывных относительно сходимости $x_i\to x$. Предположим, наконец, что любая фундаментальная последовательность $\{x_i\}$, для которой каждая из последовательностей $f_m(x_1), f_m(x_2), \ldots$ $(m=1, 2, \ldots)$ ограничена, сходится (в сходимости $x_i\to x$) к некоторому элементу $x\in X$. Тогда формула

$$\|x-y\|=|x-y|+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{1}{m}}\frac{|f_m(x)-f_m(y)|}{1+|f_m(x)-f_m(y)|}$$

определяет в X расстояние, относительно которого X является полным пространством, а сходимость во введенной метрике согласуется со сходимостью $x_n\to x$, т. е. равенство $\lim_{i\to\infty}\|x_i-x\|=0$ эквивалентно соотношению $x_i\to x$.

Полная метрика, введенная таким образом в пространстве $LC^n(Y)$, согласуется с регулярной сходимостью в смысле Кертиса, а в пространстве $P(X, Y)$ она согласуется с так называемой непрерывной сходимостью последовательности функций. Полная метрика в пространстве $P(Y)$ определена автором независимо от метрики, введенной в $LC^n(Y)$.

J. W. Jaworowski

3873. О размерности Менгера в пространстве Куратовского. Гомес-Агилар (Sobre la dimension de Menger en el espacio de Kuratowski. Gómez Aguilar Ignacia), Gac. mat., 1954, 6, № 7—8, 160—162 (исп.)

Автор указывает, что он хочет перенести определение размерности Менгера (индуктивной) на множества в пространстве Куратовского (т. е. T_1-пространстве) с использованием лишь понятия замыкания множества и аксиом, которые накладывает на это понятие Куратовский. Это, конечно, не представляет никаких затруднений, ибо в индуктивном определении размерности (кстати, принадлежащем не Менгеру, а Урысону) аксиома отделимости Хаусдорфа совершенно не используется. Однако определение, помещенное в реферируемой статье, даже по своей идее не может быть адэкватно определению Менгера, так как в нем отсутствует один из основных моментов — взятие произвольно малых окрестностей точек множества, а в том виде, как оно изложено, вообще лишено всякого смысла ввиду неправильного определения разложения множества на внутреннюю часть и границу, использования запутанных и точно не определенных обозначений и полного отсутствия в определении указаний, соответствующих логическим кванторам существования и всеобщности. М. Ф. Бокштейн

3874. О размерности пространств близости. Смирнов Ю. М., Матем. сб., 1956, 38, № 3, 283—302

Подробное изложение результатов, кратко опубликованных автором ранее (РЖМат, 1955, 116). Автор отмечает и исправляет неточность, допущенную в упомянутой первоначальной публикации и заключающуюся в том, что многие теоремы, сформулированные там сначала для δ-размерности, автоматически переносились в полученную теорию размерности вполне регулярных, но не нормальных пространств. Впрочем, эту неточность во многих случаях легко исправить, если заменить участвующие в формулировках замкнутые множества вполне замкнутыми. П. С. Александров

3875. Размерность метрических пространств. Даукер, Гуревич (Dimension of metric spaces. Dowker C. H., Hurewicz W.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 83—88 (англ.)

Авторы рассматривают три различных определения размерности метрического пространства X, обозначая эти размерности соответственно через $\dim X$ (размерность, определяемая с помощью конечных покрытий). $\mathrm{Ind}\, X$ (большая индуктивная размерность) и $\mathrm{ds}\, X$ («секвенциальная» размерность, определяемая с помощью последовательности измельчающихся локально конечных покрытий). Доказано, что для метрического пространства X справедливы равенства $\dim X = \mathrm{Ind}\, X = \mathrm{ds}\, X$; для первого из этих равенств, полученного ранее Катетовым, дано новое доказательство. M. Reichbach

3876. По поводу одной работы Д. Е. Меньшова. Гладкий А. В., Матем. сб., 1956, 39, № 3, 379—384

Строится пример несчетного множества попарно не пересекающихся континуумов на плоскости, множество точек локальной несвязности которых есть множество второй категории на плоскости. А. С. Пархоменко

3877. Поправка к статье «О некоторых свойствах сферических сечений множеств в E^n». Хомма (On some properties of a sphere sections of the sets in E^n. Correction. Homma Tatsuo), Yokohama Math. J., 1954, 2, № 1, перед 1 стр. (англ.)

См. РЖМат, 1957, 2141.

3878. Топологический анализ. Уайберн (Topological analysis. Whyburn G. T.), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 3, 204—218 (англ.)

Президентская речь перед годичным собранием Общества в Хаустоне (Техас) 28 декабря 1955 г.

«Топологический анализ» — совокупность тех теорем теории функций, которые формулируются в топологических терминах или доказываются с широким применением топологических методов.

Рассматриваются, главным образом, применения методов теоретико-множественной топологии в теории функций комплексного переменного. Приводятся некоторые определения и новые результаты, относящиеся к этому кругу идей.

Отображение $f: X \to Y$ называется квазиоткрытым, если для каждой точки $y \in f(X)$ и для всякого открытого множества $U \subset X$, содержащего компактную компоненту множества $f^{-1}(y)$, точка y является внутренней для множества $f(U)$. Отображение f называется сильно квазиоткрытым, если y есть внутренняя точка множества $f(U)$ относительно всего пространства Y.

Теорема. Для того чтобы отображение f плоской области X в плоскость π было сильно квазиоткрытым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой элементарной области R в X с границей C в X выполнялось условие: множество $f(R \cup C)$ равно множеству $f(C)$, сложенному с объединением всех ограниченных компонент множества $\pi \setminus f(C)$. (Элементарная область есть ограниченное связное открытое множество, граница которого состоит из конечного числа простых замкнутых кривых, попарно не имеющих общих точек).

Если A и B — локально компактные связные, локально связные метрические пространства со счетной базой, то предел равномерно сходящейся последовательности сильно квазиоткрытых отображений $A \to B$ есть сильно квазиоткрытое отображение.

Обозначим через L_f множество всех точек $x \in X$, для которых множество $f^{-1}f(x)$ является вполне несвязным, и через D_f — множество всех точек $x \in X$, для которых x является компонентой множества $f^{-1}f(x)$. Очевидно, что $L_f \subset D_f$.

Множество называется полуплотным, если оно плотно в некотором открытом подмножестве каждого открытого множества $U \subset X$, имеющего открытый образ.

Теорема. Если X — область на двумерной сфере и $f(X) = Y$ — такое компактное квазиоткрытое отображение, что никакая компонента прообраза точки не разбивает области X, то неравенство $\dim f(K) \leqslant \dim K$ тогда и только тогда выполняется для каждого компактного одномерного множества $K \subset X$, когда множество D_f полуплотно в X.

Отображение называется компактным, если прообраз всякого компакта есть компакт. Будем говорить, далее, что f сохраняет «нигде неплотность» компактных множеств, если из того, что K является компактным нигде не плотным множеством в X, следует, что множество $f(K)$ нигде не плотно в Y.

Теорема. Пусть $f(X) = Y$ — такое квазиоткрытое отображение двумерного многообразия X без края на связное, локально связное, локально компактное множество Y, что никакая компонента прообраза точки, лежащая внутри замкнутой двумерной клетки на X, не разбивает X. Для того, чтобы f сохраняло «нигде неплотность» компактных множеств, необходимо и достаточно, чтобы множество L_f было полуплотно в X.

Теорема. Пусть Z и W — плоскости комплексного переменного и $f: X \to W$ — отображение области $X \subset Z$, непрерывное в X и дифференцируемое во всех точках множества $f^{-1}(Y_0)$, где $Y_0 \subset f(X)$ — некоторое открытое подмножество, плотное в $f(X)$. Тогда f сильно квазиоткрыто, никакая компонента прообраза точки, лежащая внутри замкнутой двумерной клетки в X, не разбивает X и множество $f(L_f)$ плотно в $f(X)$. Кроме того, если отображение f не является постоянным ни на каком открытом множестве в X, то множество L_f полуплотно в X.

Предположим, что функция $w = f(z)$, не являющаяся постоянной, непрерывна в области R плоскости Z и дифференцируема в $R \setminus H$, где H — замкнутое нигде не плотное подмножество множества R, на котором функция f постоянна. В таком случае множество H является вполне несвязным. А. С. Пархоменко

3879. Об одной проблеме Стоилова. Берштейн (Sur un problème de M. S. Stoïlow. Berstein I.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 24, 2796—2798 (франц.)

Доказываются следующие предложения:

Теорема 1. Пусть V — ориентируемая поверхность, W — неориентируемая поверхность и пусть g — отображение, осуществляющее двулистное накрытие поверхности W ориентируемой поверхностью $\tilde{W}$; тогда для всякого внутреннего (т. е. непрерывного, открытого и нульмерного) отображения $\varphi: V \to W$ существует такое отображение $\psi: V \to \tilde{W}$, что $\varphi = g\psi$.

Теорема 2. Пусть P_1, P_2 — проективные плоскости, полученные из комплексных сфер (z) и (w) отождествлением симметричных точек: z и $-1/\bar{z}$, w и $-1/\bar{w}$; тогда для всякого внутреннего отображения $\varphi: P_1 \to P_2$ существует такой гомеоморфизм $\tau: P_1 \to P_1$, что отображение $\psi = \varphi\tau: P_1 \to P_2$ порождается рацио-

нальной функцией $w = R(z)$, удовлетворяющей уравнению $\left(R - \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{R(z)}$. Имеется ряд опечаток.

В. А. Ефремович

3880. Теорема об антиподах для многозначных отображений и теорема о неподвижных точках. Яворовский (Theorem on antipodes for multi-valued mappings and a fixed point theorem. Jaworowski J. W.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 4, 187—192 (англ.); Бюлл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 4, 183—188

Обобщаются в новом направлении известные теоремы Борсука об антиподах.

Многозначные непрерывные отображения компакта X в компакт Y определяются как отображения, ставящие в соответствие каждой точке $x \in X$ замкнутое непустое множество $F(x) \in Y$ таким образом, чтобы «график» $Z = \underset{(x,y)}{E}(y \in F(x))$ был замкнут в $X \times Y$. Это определение равносильно требованию, чтобы отображение F, рассматриваемое как однозначное отображение пространства X в пространство замкнутых множеств 2^Y, было полунепрерывным сверху.

Непрерывное отображение F называется ациклическим в данной размерности n, если для всех $x \in X$ множества $F(x)$ ацикличны (автор понимает это в том смысле, что для $r < n$ все r-мерные циклы гомологичны нулю в X; при этом гомологические понятия берутся в смысле Вьеториса по модулю 2, а нульмерные гомологии определяются так, что компакт X является 0-ациклическим тогда и только тогда, когда он не пуст).

Пусть многозначное отображение F непрерывно и n-ациклично. Через f и g обозначаем отображения, проектирующие график Z соответственно в X и в Y. Для каждого $x \in X$ множества $f^{-1}(x)$ и $F(x)$ гомеоморфны, следовательно, по известной теореме Вьеториса, отображение f порождает изоморфизм f_r группы $\Delta^r Z$ на группу $\Delta^r X$ (автор пользуется для обозначения групп гомологий символом H^r, а не Δ^r) для всякого $r < n$. Отсюда следует, что гомоморфизм $F_r = g_r f_r^{-1}$ группы $\Delta^r X$ в $\Delta^r Y$ определен для всех $r < n$. Этот гомоморфизм называется гомоморфизмом, порожденным отображением F. Многозначное отображение Φ пространства X в себя называется инволюцией, если его график симметричен относительно диагонали $D = \underset{(x,y)}{E}(x = y)$ пространства $X \times X$, т. е. если из $y \in \Phi(x)$ следует $x \in \Phi(y)$.

В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть X есть n-цикличный компакт и Φ — его многозначная n-ациклическая инволюция. Пусть F — такое многозначное непрерывное ациклическое отображение компакта X в S^n, что для любого $x \in X$ и $y \in \Phi(x)$ множества $F(x)$ и $F(y)$ не пересекаются. Тогда гомоморфизм группы $\Delta^n X$ в $\Delta^n S^n$, порожденный отображением F, является гомоморфизмом «на». Отсюда, в частности, следует, что в условиях теоремы 1 отображение F есть отображение на всю сферу S^n.

Теорема 2. Пусть X, Φ — те же, что и в теореме 1, а F — полунепрерывная сверху функция, ставящая в соответствие каждой точке $x \in X$ ацикличный компакт $F(x) \subset R^n$. Тогда существуют такие точки $x_0 \in X$, $y_0 \in \Phi(x_0)$, что $F(x_0)$ и $F(y_0)$ пересекаются. В частности, если F есть многозначное полунепрерывное сверху отображение сферы S^n в R^n с ацикличными компактными образами всех точек и a — антиподное отображение сферы, то существует такая точка $x_0 \in S^n$, что $F(x_0)$ и $F(ax_0)$ пересекаются.

Теорема 3. Всякая многозначная ациклическая инволюция Φ ацикличного компакта X имеет неподвижную точку (т. е. точку $x_0 \in \Phi(x_0)$).

П. С. Александров

3881. Об отображениях, удовлетворяющих некоторым условиям на границе. Косинский (On mappings which satisfy certain conditions on boundari. Kosiński A.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 6, 335—340 (англ.); бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 6, 327—332

Пусть A и B — бикомпактные подмножества некоторых хаусдорфовых пространств M и N соответственно и пусть A_0 — замкнутое подмножество множества A. Автор рассматривает непрерывные отображения вида $f : (A, A_0) \to (B, \mathrm{Гр}B)$ и при некоторых предположениях относительно отображения $f_0 = f \mid A_0$ исследует свойства индуцированных гомоморфизмов $f_* : H_k(A) \to H_k(B)$ чеховских гомологических групп (для бикомпактной группы коэффициентов).

Предположим, что $H_k(M) = H_{k+1}(M) = H_k(N) = H_{k+1}(N) = 0$, $A_0 = \mathrm{Гр}A$ и пусть $g : (B, \mathrm{Гр}B) \to (A, \mathrm{Гр}A)$ — непрерывное отображение, $g_0 = g \mid \mathrm{Гр}B$ и $g_{0*} f_{0*} : H_k(\mathrm{Гр}A) \to H_k(\mathrm{Гр}B)$ — тождественный гомоморфизм. Тогда f_* есть мономорфизм (т. е. изоморфизм «в»); если, кроме того, $f_{0*} : H_k(\mathrm{Гр}A) \to H_k(\mathrm{Гр}B)$ — эпиморфизм (т. е. гомоморфизм «на»), то f_* есть изоморфизм. Пусть теперь $M = N$, $H_k(M) = H_{k+1}(M) = 0$ и $f_{0*} : H_k(A_0) \to H_k(\mathrm{Гр}B)$ есть эпиморфизм (или r-гомоморфизм, см. РЖМат, 1957, 2962). Тогда f_* есть эпиморфизм (или соответственно r-гомоморфизм).

Эти теоремы связаны с результатами Ситникова о так называемых затухающих отображениях (Матем. сб., 1952, **31**, 439) для случая $M = N = S^n$.

Далее, отображение f индуцирует изоморфизм гомологической последовательности пары $(A, \mathrm{Гр}A)$ на гомологическую последовательность пары $(B, \mathrm{Гр}B)$ при условии, что выполнено по крайней мере одно из следующих условий: 1) $f_{0*} : H_k(\mathrm{Гр}A) \to H_k(\mathrm{Гр}B)$ есть изоморфизм («на») для всех k, отображение $f \mid \mathrm{Вн}A$ является затухающим и $f(\mathrm{Вн}A) \supset \mathrm{Вн}B$ (здесь $\mathrm{Вн}X = X \setminus \mathrm{Гр}X$); 2) f_0 гомеоморфно отображает $\mathrm{Гр}A$ на $\mathrm{Гр}B$ и $f(\mathrm{Вн}A) = \mathrm{Вн}B$.

Заключительные результаты статьи касаются связи между дополнениями множеств A и B, вытекающей из теорем двойственности, если M и N суть n-мерные многообразия.

J. W. Jaworowski

3882. О цепной алгебре пространства петель. Адамс, Хилтон (On the chain algebra of a loop space. Adams J. F., Hilton P. J.), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 4, 305—330 (англ.)

Пусть K — клеточный комплекс, одномерный остов которого состоит из одной точки. Строится цепной комплекс, гомологии которого совпадают с гомологиями пространства петель полиэдра K. Описываемая в заметке конструкция была позже значительно усовершенствована Адамсом (РЖМат, 1957, 2155). Исследуются гомологии пространств петель для некоторых конкретных комплексов, например, для комплекса, состоящего из трех клеток: нульмерной, n-мерной и $2n$-мерной.

А. С. Шварц

3883. Изучение пространств отображений с помощью спектральных последовательностей. Федерер (A study of function spaces by spectral sequences. Federer Herbert), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, № 2, 340—361 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство, допускающее конечномерное клеточное разбиение K, Y — топологическое пространство, гомотопически простое во всех размерностях, Z — пространство непрерывных отображений $X \to Y$, Z_q — пространство непрерывных отображений q-мерного остова K^q разбиения K в про-

странстве Y, через v_q, где $v \in Z$, обозначается отображение v, рассматриваемое только на K^q.

С помощью теории точных пар Масси (РЖМат, 1954, 2909) автор строит спектральную последовательность $C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots, C^{(r)}, \ldots$, связывающую гомотопические группы $\pi_p(Z)$ с гомотопическими инвариантами пространств X и Y и отображения v. Эта спектральная последовательность дважды градуирована: $C^{(r)} = \sum_{p \geqslant 0,\, q \geqslant 0} C^{(r)}_{p,q}$; дифференциалы $d^{(r)}: C^{(r)} \to C^{(r)}$ удовлетворяют условию $d^{(r)}(C^{(r)}_{i,j}) \subset C^{(r)}_{i-1,\, j+r+1}$. Группа $C^{(1)}_{p,q}$ изоморфна группе $H^q(X, \pi_{p+q}(Y))$ при $p \geqslant 1$ и подгруппе группы $H^q(X, \pi_{p+q}(Y))$ при $p = 0$. Группа $C^{\infty}_{p,q}$ изоморфна группе $G_{p,q-1}/G_{p,q}$, где через $G_{p,q}$ обозначено ядро естественного отображения группы $\pi_p(Z, v)$ в $\pi_p(Z_q, v_q)$.

Используя эту спектральную последовательность, автор исследует группы $\pi_p(Z)$ в ряде частных случаев. Например, если пространство Y гомеоморфно нечетномерной сфере S^m, то $\pi_p(Z) \otimes R \approx H^{m-p}(X, R)$ при $p \geqslant 2$ (через R обозначено поле рациональных чисел). Если пространство Y гомеоморфно четномерной сфере S^m, то при $p \geqslant 2$ может быть написана точная последовательность $\ldots \to H^{2m-p-1}(X, R) \to \pi_p(Z, v) \otimes R \to H^{m-p}(X, R) \to H^{2m-p}(X, R) \to \ldots$, причем гомоморфизм $H^{m-p}(X, R) \to H^{2m-p}(X, R)$ задается формулой $t \to tv^*(S)$, где S — основной класс когомологий сферы S^m.

А. С. Шварц

3884. Вещественные когомологии дифференцируемых главных расслоенных пространств. 1. Понятия дифференциальной алгебры, алгебра Вейля группы Ли. Картан (Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. I : Notions d'algèbre différentielle, algèbre de Weil d'un groupe de Lie. Cartan H.), Sémin. H. Cartan, Ecole Norm. Supér., 1949—1950 (1956), 2, № 19, 1—10 (франц.)

Пусть $\mathcal{E}$ — дифференцируемое многообразие, E — алгебра всех дифференциальных форм на нем. Каждому векторному полю x на многообразии $\mathcal{E}$ автор сопоставляет два линейных оператора, действующих в E: внутреннее умножение $i(x)$ на поле x и инфинитезимальное преобразование $\theta(x)$, отвечающее полю x. Выписываются основные соотношения, связывающие операторы $i(x)$, $\theta(x)$ и внешний дифференциал d. Пусть теперь $\mathcal{E}$ — главное расслоенное пространство группы Ли G с базой B. Тогда всякому вектору x из алгебры Ли $\mathfrak{A}(G)$ группы G отвечает левоинвариантное векторное поле на G, а также некоторое векторное поле на $\mathcal{E}$. Поэтому элемент x индуцирует операторы $i(x)$, $\theta(x)$ в алгебре $A(G)$ всех левоинвариантных форм на группе G и аналогичные операторы в алгебре E, которые автор также обозначает через $i(x)$ и $\theta(x)$. Формы из E, аннулируемые всеми операторами $\theta(x)$ $(x \in \mathfrak{A}(G))$, образуют подалгебру I_E инвариантных форм. Инвариантные формы, аннулируемые также и операторами $i(x)$ $(x \in \mathfrak{A}(G))$, образуют подалгебру B базисных форм, которую можно отождествить с алгеброй всех форм на базе. Обе эти подалгебры инвариантны относительно d. Всякой инфинитезимальной связности в расслоенном пространстве $\mathcal{E}$ автор сопоставляет гомоморфизм $f: A(G) \to E$.

Пусть $S(G)$ — алгебра многочленов над пространством $\mathfrak{A}'(G)$, дуальным к $\mathfrak{A}(G)$, градуированная таким образом, что элементы пространства $\mathfrak{A}'(G)$ имеют степень два. Градуированная алгебра $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ называется алгеброй Вейля группы G. В этой алгебре также вводятся операторы $i(x)$, $\theta(x)$ $(x \in \mathfrak{A}(G))$ и дифференциал δ. Гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм $\tilde{f}: W(G) \to E$, коммутирующий со всеми введенными операторами. Инвариантные элементы алгебры $W(G)$ переходят при гомоморфизме $\tilde{f}$ в некоторые коциклы алгебры B базисных форм. Образованная ими подалгебра называется характеристической. Переходя к классам когомологий, получаем характеристическую подалгебру алгебры когомологий $H(B)$ пространства B.

А. Л. Онищик

3885. Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий. Гамкрелидзе Р. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 5, 685—706

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1954, 2061).

В. А. Рохлин

3886. О минимальных множествах в динамических системах. Даукер (On minimal sets in dynamical systems. Dowker Yael Naim), Quart. J. Math., 1956, 7, № 25, 5—16 (англ.)

Рассматривается компактная дискретная динамическая система (X, T), т. е. компактное метрическое пространство X с гомеоморфизмом T пространства X на себя. Замкнутое инвариантное (т. е. $TM = M$) подмножество M пространства X называется минимальным множеством, если оно не содержит собственного замкнутого инвариантного подмножества.

В семействе S замкнутых инвариантных множеств пространства X вводится некоторая метрика, в которой S оказывается полным пространством. В этой метрике пространство Ω минимальных множеств пространства X является замкнутым в S и, следовательно, также полным. Топология, индуцируемая в Ω этой метрикой, совпадает с топологией, индуцируемой в Ω метрикой Хаусдорфа в пространстве замкнутых множеств пространства X, и с естественной топологией, определяемой окрестностями минимальных множеств в X.

Полнота пространства Ω используется для получения некоторых результатов. Минимальное множество M называется притягивающим, если существует точка $p \in X \setminus M$, для которой M есть единственное минимальное множество, содержащееся в ω-предельном множестве для p. Пространство X называется T-связным, если для любого замкнутого собственного подмножества A пространства X имеет место соотношение $TA \cap \overline{X \setminus A} \neq 0$. Предположим, что X не является минимальным множеством и не содержит несчетного количества минимальных множеств. Если X связно или если X не содержит изолированного минимального множества, или если некоторая точка пространства X не содержится ни в каком минимальном множестве, тогда X содержит по крайней мере одно притягивающее минимальное множество. В T-связном пространстве или существует конечное число минимальных множеств и все они притягивающие, или существует бесконечно много минимальных множеств и бесконечно много из них являются притягивающими.

И. Н. Врублевская

См. также: 3808, 3812, 3848, 3904, 4001, 4165.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3887. О мере типа Хаусдорфа. Гливенко Е. В., Матем. сб., 1956, 39, № 4, 423—432

Рассматривается метрическое пространство R со счетной базой, в котором выбрана система открытых множеств $\{\Gamma_i\}$ с диаметрами $d(\Gamma_i)\to 0$ при $i\to\infty$, дающая покрытие пространства, при котором для каждой точки найдутся покрывающие множества сколь угодно малого диаметра. Каждой области Γ_i ставится в соответствие число $a_i\geqslant 0$, называемое элементарной мерой. Для произвольного множества $M\subset R$ мера типа Хаусдорфа определяется равенством

$$\operatorname{mes} M=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n},$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества M областями $\{\Gamma_{i_n}\}$ с $d(\Gamma_{i_n})<\varepsilon$.

Доказывается F-свойство меры типа Хаусдорфа для A-множеств, состоящее в том, что:

1. Для всякого A-множества $M\subset R$ с $\operatorname{mes} M<\infty$ и всякого $\varepsilon>0$ найдется замкнутое множество $F\subset M$, для которого

$$|\operatorname{mes} M-\operatorname{mes} F|<\varepsilon.$$

2. Для всякого A-множества $M\subset R$ с $\operatorname{mes} M=\infty$ и всякого $N>0$ найдется замкнутое множество $F\subset M$, для которого $\operatorname{mes} F>N$. Р. С. Гутер

3888. Абстрактный интеграл как положительный функционал и теорема о расширении меры. Клуванек (Abstraktný integrál ako kladná funkcionála a veta o rozšírení miery. Kluvánek Igor), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 1, 3—9 (словац.; рез. русс.)

Излагается с некоторыми модификациями метод Ф. Рисса расширения положительного функционала и доказывается одна известная теорема о продолжении меры. П. И. Романовский

3889. Об одном нелинейном функционале в «C». Бохан К. А., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1956, 125, 157—164

На $[a, b]$ задано семейство непрерывных кривых $\{\varphi(t)\}$, обладающее свойствами: через каждую точку полосы $a\leqslant t\leqslant b$; $-\infty<x<\infty$ проходит единственная кривая семейства; $\varphi(t)\equiv 0$ принадлежит семейству; установлено такое взаимно однозначное соответствие между числами $p\in(-\infty,\ \infty)$ и семейством, что если $p_1<p_2$, то $\varphi_{p_1}(t)<\varphi_{p_2}(t)$. Последнее соответствие определяет однозначную и непрерывную функцию $p=p(t, x)$, где (t, x) — произвольная точка рассматриваемой полосы. При помощи функции $p(t, x)$ вводится обычным образом интеграл от произвольной непрерывной функции $x(t)$:

$$\int_a^b p(t,\ x(t))\,dt=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}p(\tau_i,\ x(\tau_i))\,\Delta t_i,$$

который совпадает с интегралом Римана от $x(t)$, когда $\varphi_p(t)=p$. Рассмотрены некоторые свойства данного интеграла. Пусть $\overline{C}$ — множество непрерывных функций, заданных на произвольных отрезках $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$, и $x_{[t_0,\ t]}$ — непрерывная функция $x(t)$, заданная на $[t_0, t]$. Показано, что

$$f(x)=\int_\alpha^\beta p(t,\ x(t))\,dt \qquad (1)$$

есть непрерывный и возрастающий функционал, обладающий свойствами: 1) если на $[\alpha, \beta]$ функция $x(t)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$, то $f(x)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$; 2) $f(x)\to\pm\infty$ при $x\to\pm\infty$; 3) если $x(t), x_1(t), x_2(t)\in\overline{C}$ определены соответственно на $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$, причем на $[\alpha, \gamma]$ $x(t)=x_1(t)$, а на $[\gamma,\ \beta]$ $x(t)=x_2(t)$, то $f(x)=f(x_1)+f(x_2)$;

4) $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(x_{[t_0,\ t]})}{t-t_0}=p(t_0,\ x_0)$ для любой кривой $x(t)$,

проходящей через точку (t_0, x_0). Доказывается, что всякий нелинейный непрерывный и возрастающий в $\overline{C}$ функционал $f(x)$, удовлетворяющий условиям 1)—4), может быть представлен в виде (1) для некоторого семейства $\{\varphi_p(t)\}$. М. М. Вайнберг

3890. О последовательности интегралов. Джваршейшвили А. Г., საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, Сообщ. АН ГрузССР, 1956, **17**, № 4, 297—302

Пусть $g_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — функции с ограниченным изменением на $[a, b]$; $f(x)$ — функция, интегрируемая в смысле Данжуа — Перрона. Доказывается, что для ограниченности (в совокупности) чисел $\int_\alpha^\beta f(x)\,g_n(x)\,dx$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b;\ n=1, 2, \ldots)$ при каждой фиксированной f необходима и достаточна равностепенная ограниченность полных вариаций g_n. Кроме того, изучаются условия ограниченности (в совокупности) чисел $\int_a^b f(x)\,g_n(x)\,dx$ $(n=1, 2, \ldots)$ при фиксированных f в случае локально монотонных g_n.

П. И. Романовский

3891. О позитивных функциях. Крам (On positive-definite functions. Crum M. M.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 24, 548—560 (англ.)

Пусть $p(x)$ — комплекснозначная функция координат точки $x=(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ в пространстве R^m; функция $p(x)$ называется позитивной, если для всех конечных систем x_μ и всех комплексных ρ_μ неотрицательны все формы

$$\sum_{\mu,\ \nu=1}^{N}p(x_\mu-x_\nu)\,\rho_\mu\overline{\rho}_\nu\quad(N=1, 2, \ldots).$$

Если функция $p(x)$ позитивна и измерима, то $p(x)=q(x)+r(x)$, где 1) $q(x)=\int e^{i(x,\xi)}\,d\mu(\xi)$, $(x, \xi)=\sum_{i=1}^m x^i\xi^i$, причем интеграл взят по всему пространству, а $\mu(\xi)$ — ограниченная неотрицательная мера; 2) $r(x)=0$ для почти всех x; 3) обе функции $r(x)$ и $q(x)$ являются позитивными.

Если функция $p(x)$ позитивна на R^m, $m>1$ и изотропна, т. е. $p(x)=f(|x|)$, то она непрерывна всюду за возможным исключением точки $x=0$.

Я. Л. Геронимус

3892. О дифференцируемости функций. Петтинео (Sur la dérivabilité des fonctions. Pettineo Benedetto), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 6, 553—554 (франц.)

Пусть непрерывная функция $F(x)$ определена на (a, b) и через $F(\Delta)$, $O[F, \Delta]$ будем обозначать соответственно приращение и колебание функции $F(x)$ на интервале Δ. Конечная система интервалов $\sum T_i$

покрывает замкнутое множество C, если: А) каждый интервал T_i содержит хотя бы одну точку из C; В) каждая точка из C есть либо внутренняя точка интервала T_i, либо граничная точка двух смежных интервалов. Обозначим через $\left[\sum T_i\right]_C$ класс таких систем интервалов $\sum T_i$, которые покрывают множество C.

По определению, вариация функции $F(x)$ на множестве C есть число $\nu[C]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенств $mT_i < \delta$ вытекает неравенство

$$|\nu[C] - \sum F(T_i)| < \varepsilon,$$

где $\sum T_i$ принадлежит классу $\left[\sum T_i\right]_C$. Из определения следует, что если существует $\nu[C]$, то существует и $\nu[C^x]$, где $C^x = C \cap (a, x)$.

По определению, $F(x)$ — абсолютно непрерывная (ограниченной вариации) функция на C, если $\nu[C^x]$ абсолютно непрерывна (ограниченной вариации) на (a, b). Далее $F(x)$ есть почти абсолютно непрерывная (почти ограниченной вариации) на (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество C, на котором $F(x)$ абсолютно непрерывна (ограниченной вариации).

Приводятся, в частности, теоремы:

I. Для того чтобы существовала вариация $\nu[C]$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum O[F, T_i]$, где T_i — смежные интервалы множества C.

IV. Для того чтобы функция $F(x)$ имела почти всюду на (a, b) конечную производную, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ была почти абсолютно непрерывной на (a, b). А. Г. Джваршейшвили

3893. О дифференциальном выражении $p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy$ в области функций, измеримых относительно одной и непрерывных относительно другой переменной. Вольпато (Sull'espressione differenziale: $p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy$ nell'ambito delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile. Volpato Mario), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 303—306 (итал.)

Предполагается, что $p(x, y)$ и $q(x, y)$, определенные на $R = I \times J$ ($I: a \leqslant x \leqslant b$; $J: c \leqslant y \leqslant d$), соответственно измеримы по x и y, непрерывны по y и x и имеют суммируемые на I и J мажоранты $P(x)$ и $Q(y)$. При этих условиях с помощью одной теоремы Скорца-Драгони (Scorza Dragoni G., Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1952, 12, 55—61) устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы $p\,dx + q\,dy$ было с надлежащими оговорками полным дифференциалом некоторой $F(x, y)$, абсолютно непрерывной по каждому переменному. П. И. Романовский

3894. О системах графиков равностепенно абсолютно непрерывных функций. Викторовский Е. Е., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 205—215

Решается вопрос о том, каким условиям должна удовлетворять система графиков абсолютно непрерывных функций на плоскости, чтобы оказалось возможным подобрать уравнение $y' = f(x, y)$ с измеримой $f(x, y)$ и суммируемой $\text{vrai}\max_y f(x, y)$ так, чтобы совокупность обобщенных интегральных кривых (в смысле, устанавливаемом в работе автора, РЖМат, 1955, 714) совпадала с данной системой графиков. П. И. Романовский

3895. Об одной теореме Уолша. Дворецкий (On a theorem of J. L. Walsh. Dvoretzky Aryeh), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 363—366 (англ.)

Реферируемая статья является развитием работы Уолша (РЖМат, 1953, 650), где доказывается, что если $f_n(x)$ и $f(x)$ имеют r-производные и $f_n(x) \to f(x)$ ($n \to \infty$, $a < x < b$), то для любой точки $x_0 \in (a, b)$ существует последовательность $x_n \in (a, b)$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(r)}(x_n) = f^{(r)}(x_0).$$

Устанавливается теорема: пусть $f(x)$ и $f_n(x)$ имеют r-ю производную в интервале (a, b) и

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in I,\, y\in I} |f_n(y) - f(x)| = 0$$

для каждого открытого интервала $I \subset (a, b)$. Тогда для любой точки $x_0 \in (a, b)$ можно разбить последовательность натуральных чисел $N = \{n\}$ на такие две части $N_1 = \{n_1\}$ и $N_2 = \{n_2\}$, что для каждого n_1 существует $x_{n_1} \in (a, b)$, для которого $f_{n_1}^{(r)}(x_{n_1}) = f^{(r)}(x_0)$, причем в случае бесконечного множества N_1

$$\lim_{n_1\to\infty} x_{n_1} = x_0$$

и в случае бесконечного N_2 выполняется

$$\overline{\lim_{n_2\to\infty}} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \left| f_{n_2}^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_0) \right| dx = o(h) \quad (h \to 0). \qquad (1$$

Если точка x_0 не является локальным экстремумом (в широком смысле), то N_2 может быть взято конечным.

В соотношении (1) $o(h)$ нельзя заменить на $o[\psi(h)]$, где $h^{-1}\psi(h) \to 0$ $(h \to 0)$, даже если предположить равномерную сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$. И. М. Ганзбург

3896. Структура непрерывных функций одной переменной. II. Бёгель (Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. II. Bögel K.), J. reine und angew. Math., 1956, 196, № 3-4, 137—154 (нем.) Часть I см. РЖМат, 1957, 2983. Дается общий метод для построения любой непрерывной на $\bar{J} = [a, b]$ функции. Для функции $f(x)$, заданной на $\bar{J}$, определяется множество $S(f, \bar{J}) = \lim_{n\to\infty} S_n(f, \bar{J})$, где $S_0 = \{a, b\}$, $S_1 = S_0 \cup H(f, \bar{J})$, а остальные множества $S_n(f, \bar{J})$ определяются некоторым индуктивным процессом. Непрерывная функция называется линейно вогнутой, если $H^+(f, \bar{J})$ пусто.

Пусть даны замкнутое множество F, его открытое дополнение B и число m. Через $\Phi[\bar{J}, F, m]$ обозначим класс линейно вогнутых функций $g(x)$, для которых $g(a) = g(b) = 0$, $S(g, \bar{J}) = F$, $\Lambda(g, J) = B$, $\max_{x\in\bar{J}} g(x) = m$. Пусть далее $F \subset \bar{J}$ замкнуто и K_r — компоненты его дополнения, причем на каждом задано множество V_r такое, что $V_r \subset K_r$ и $F_r = V_r \cup G(\bar{K}_r$ замкнуто. Если каждому множеству V_r ставится в соответствие число m_r, то к классу $\Psi[\bar{J}, F, \{V_r\}, \{m_r\}]$ относят все функции $g(x)$, для которых $g(x) =$ при $x \in F$ и

$$g(x) \in \Phi[\bar{K}_r, F_r, m_r] \text{ при } x \in \bar{K}_r.$$

Положим теперь

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n(x),$$

где $f_0(x)$ — произвольная линейная функция,

$f_1(x) \in \Phi(\bar{J}, F_1, m_1)$, $f_n(x) \in \Psi[J_1, \bar{F}_{n-1}, \{V_{n,r}\}, \{m_{n,r}\}]$ для $n \geqslant 2$. Построенная функция $f(x)$ непрерывна на $\bar{J}$ при любых F, V и m. Наоборот, произведя такое построение для всевозможных классов Φ и Ψ, получим все непрерывные функции на J, причем для каждой такое представление единственно.

Из доказанного, в частности, вытекает, что множество всех F_σ-множеств из $\bar{J}$ и всех G_δ-множеств из J имеет мощность континуума. Р. С. Гутер

3897. Последовательности, равномерно распределенные в среднем на отрезке [0,1]. Бриш Н. И., Уч. зап. Гродненск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 21—23

Пусть $K \subset L_2$ — класс периодических функций с периодом 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется равномерно распределенной в среднем на $[0, 1]$ относительно класса K, если для любой $f \in K$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k + t) - \int_0^1 f(t)\, dt \right]^2 dt \right\}^{1/2} = 0.$$

Класс K называется полным в среднем, если из равномерного распределения $\{x_n\}$ в среднем относительно K следует ее равномерное распределение в среднем относительно L^2 на отрезке $[0, 1]$.

Теорема. Если K — плотный класс в L^2, то класс K полный в среднем. В. К. Дзядык

3898. О базисах в пространстве непрерывных функций. Шайдуков К. М., Науч. тр. Казанск. ин-та инж.-строит. нефт. пром-сти, 1956, вып. 4, 157—161

Если система непрерывных функций на $[a, b]$, $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $g_0(x) \equiv 1$ такова, что система $\{g_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $C[a, b]$ и полна в этом пространстве, то можно построить в $C[a, b]$ ортонормированный базис $\{\tilde{g}_n(x)\}$ вида

$$\tilde{g}_n(x) = a_n + \sum a_{nm} g_m(x),$$

где сумма справа при любом n содержит конечное число членов (каждая функция $f \in C[a, b]$ представима единственным образом в виде равномерно сходящегося ряда $f = \sum_1^{\infty} c_n \tilde{g}_n$).

Работа содержит много опечаток и неясных мест. И. Г. Соколов

3899. Об определении существенной кратности для непрерывных преобразований. Микл (On the definition of significant multiplicity for continuous transformations. Mickle Earl J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 440—451 (англ.)

Применение результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 1278) для случая непрерывных преобразований плоскости. Для непрерывного отображения T единичного квадрата Q плоскости выделяется класс существенных максимальных континуальных прообразов, определение которых инвариантно относительно выбора координатной системы и функция кратности удовлетворяет соотношению

$$A(T) = \int N^*(x, T, \mathcal{E})\, dH^2,$$

где $A(T)$ означает меру Лебега, а интегрирование производится по двумерной мере Хаусдорфа. Р. С. Гутер

3900. О произведении абсолютно непрерывных преобразований в евклидовом n-мерном пространстве. Рейкелдерфер (On the product of absolutely continuous transformations in euclidean n-space. Reichelderfer Paul V.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 1, 5—42 (англ.)

Целью работы является обобщение теоремы Н. К. Бари об условиях абсолютной непрерывности суперпозиции абсолютно непрерывных функций на случай функций нескольких переменных.

Устанавливаются условия, при которых суперпозиция двух абсолютно непрерывных функций n переменных со значениями в n-мерном евклидовом пространстве будет абсолютно непрерывной и имеет место цепное правило для якобианов в обычном или обобщенном смысле. Р. С. Гутер

3901. О некоторых определениях монотонности для функций двух переменных. Маркус (Sur quelques notions de monotonie concernant les fonctions réelles de deux variables réelles. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2207—2209 (франц.)

Рассматриваются три разных определения монотонности действительных непрерывных функций, определенных в квадрате. Формулируются теоремы о свойствах множеств уровня функций, монотонных в смысле каждого из этих определений.

Примечание референта. Первое из приведенных автором определений и основные результаты относительно функций, монотонных в смысле этого определения, принадлежат А. С. Кронроду (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 1, 24—134). А. Я. Дубовицкий.

3902. Свойства действительных функций на непрерывных сетях «однотипных окрестностей». Фрода (Propriétés des fonctions réelles sur des réseaux continus de «para-voisinages». Froda Alexandre), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 6, 549—552 (франц.)

Изучается поведение действительных функций, определенных в евклидовом пространстве $\mathcal{E}^n$, по отношению к специально выделенным семействам так называемых «однотипных окрестностей». А. Я. Дубовицкий

3903 К. О мере величин. Лебег (Sur la mesure des grandeurs. Lebesgue Henri, Monogrs Enseign. math., 1956, № 1, 184 p.) (франц.)

Реферируемая книга является переизданием ряда педагогических статей автора под общим названием «О мере величин», опубликованных в томах XXXI—XXXIV журнала «Enseignement mathématique» (1931—1935). Книга предназначена для будущих педагогов. В ней в основном излагаются различные приемы введения понятий длины, площади, объема. Каждая глава содержит многочисленные замечания педагогического, методического, исторического и полемического характера. Изложение наглядное и сопровождается примерами. Содержание книги: Введение. I. Сравнение; целые числа. II. Длины; числа. III. Площади. IV. Объемы. V. Длины кривых; площади поверхностей. VI. Измеримые величины. VII. Интегралы и производные. VIII. Заключение. П. И. Романовский

3904. К. Введение в теорию множеств и теорию действительных функций. Александров (Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. Alexandroff P. S. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 279 S., ill.) (нем.)

Перевод книги «Введение в общую теорию множеств и функций» (М.—Л., 1948) с добавлением предисловия автора к немецкому изданию, списка литературы, именного и предметного указателя.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3905. Относительная сила теории множеств Цермело и «New Foundations» Куайна. Россер (The relative strength of Zermelo's set theory and Quine's New Foundations. Rosser J. Barkley), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 3, Groningen-Amsterdam, 1956, 289—294 (англ.)

Устанавливается, что средствами системы Куайна «New Foundations» (NF) можно, присоединяя некоторые дополнительные аксиомы, построить модель для теории множеств Цермело. Для последней рассматриваются три варианта: S_1, которая не содержит ни аксиомы бесконечности, ни аксиомы подстановки, но содержит аксиому выделения; S_2, которая получается из S_1 путем присоединения аксиомы бесконечности; S_3, которая получается из S_2 путем присоединения аксиомы подстановки. Для S_1 в NF строится модель, основанная на пересчете конечных множеств. Чтобы построить модель для S_2 или S_3, предлагается воспользоваться методом известной работы Гёделя о непротиворечивости континуум-гипотезы. Построение отношения принадлежности этой модели производится с помощью трансфинитной индукции. Ввиду того, что работа находится еще в стадии становления, преждевременно указывать, какие аксиомы при этом оказываются необходимыми. Указывается, что Ори (Orey Steven, Formal development of ordinal number theory and applications to consistency proofs. Doctoral Thesis at Cornell University, September, 1953) построил теорию порядковых чисел в ее полном объеме, присоединив к NF специальную аксиому, связанную с трансфинитной индукцией для порядковых типов сильно канторовских (РЖМат, 1955, 592 К) вполне упорядоченных множеств. Высказывается предположение, что построение ε-отношения модели для S_2 может быть дано и без помощи такой аксиомы. Для обеспечения аксиомы бесконечности в модели для S_2 достаточно присоединить к NF гипотезу о существовании сильно канторовского бесконечного множества.

Чтобы получить модель для S_3, достаточно присоединить к NF аксиому подстановки для сильно канторовских множеств (x в гёделевской C4 или t в ZF9, РЖМат, 1954, 4328K; достаточно даже, чтобы x или t было сильно канторовским множеством ординалов). Высказывается предположение, что вместо аксиомы подстановки достаточно присоединить к NF аксиому о существовании вполне упорядоченных сильно канторовских множеств произвольно большой мощности и что гипотезу о существовании сильно канторовского множества при построении модели для S_2 нельзя ослабить.

А. С. Есенин-Вольпин

3906. Некоторые доказательства независимости в аксиоматической теории множеств. Мендельсон (Some proofs of independence in axiomatic set theory. Mendelson Elliott), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 3, 291—303 (англ.)

Даются новые доказательства известных результатов о независимости в теории множеств гипотезы о существовании недостижимых чисел, аксиомы бесконечности и аксиомы подстановки. Доказательства основаны на применении метода Тарского для определения истины и теоремы Гёделя о неформализуемости доказательств непротиворечивости собственными средствами формализмов.

А. С. Есенин-Вольпин

3907 Д. О множествах, эффективно отличных от всех Ф-множеств. Крейнин Я. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1956

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3908. Аппроксимация семействами функций. Торнхейм (Approximation by families of functions. Tornheim Leonard), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 641—643 (англ.)

Рассматриваются k-приближения $M^{(k)}(f)=\int_a^b |f-g|^k\,dx\,(k<\infty)$ и приближения $M^{(\infty)}(f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f-g|$ действительной непрерывной на $[a, b]$ функции $g(x)$ функциями $f(x)$ из некоторого n-параметрического семейства F функций, которое определяется как множество таких действительных непрерывных функций $f(x)$, что для каждого множества точек (x_i, y_i) $(i=1, \ldots, n)$, где $a\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant b$, существует единственная функция $f(x)\in F$, для которой $f(x_i)=y_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

Доказывается существование для любого $k\geqslant 1$ наилучшего k-приближения и устанавливается его единственность при условиях, что $k>1$ и множество F линейно. При $n=1$ и $k\neq\infty$ наилучшее k-приближение может не быть единственным и может не пересекать приближаемую функцию $g(x)$.

Последовательность $\{f_k\}$ наилучших k-приближений сходится при $k\to\infty$ к чебышевскому приближению f_∞, что обобщает на n-параметрические семейства аналогичный результат Пойа для случая приближения полиномами (Pólya G., C. r. Acad. sci., 1913, 157, 840—843).

С. И. Зуховицкий

3909. Системы П. Л. Чебышева и единственность многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1. Хавинсон С. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 110

Автор продолжает рассмотрение вопроса о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике пространства $L_1(\mu)$ (РЖМат, 1956, 8734), обобщая известные для случая пространства L_1 результаты Джексона и М. Г. Крейна.

Приводятся теоремы:

1. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — такая система непрерывных на $[a, b]$ функций, что всякий многочлен из функций этой системы имеет нигде не плотное множество нулей на $[a, b]$. Для того чтобы при любой мере μ, в которой $[a, b]$ — приведенное множество (т. е. всякая его непустая порция имеет положительную меру), для любой непрерывной функции $\omega(x)$ многочлен (из функций системы) наилучшего приближения в метрике $L_1(\mu)$ был единственным, необходимо и достаточно, чтобы система была системой П. Л. Чебышева на (a, b).

2. Пусть μ — некоторая неотрицательная мера. Для того чтобы у любой непрерывной $\omega(x)$ и любой системы П. Л. Чебышева $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (n фиксировано) многочлен из этих функций, наименее уклоняющийся от $\omega(x)$ в метрике $L_1(\mu)$, был единственным, необходимо и достаточно, чтобы множество точек роста меры μ было либо некоторым отрезком $[c, d]\subset[a, b]$, либо состояло ровно из n точек.

С. И. Зуховицкий

3910. Об аппроксимационной задаче С. Н. Бернштейна. Мергелян С. Н., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 1, 25—28

Рассматривается проблема С. Н. Бернштейна об условиях, которым должна удовлетворять функция $h(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ для того, чтобы она была весовой, т. е. для того, чтобы всякая непрерывная функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x)h(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, допускала взвешенную, с весом $h(x)$, равно-

мерную аппроксимацию алгебраическими многочленами $P(x)$ на всей вещественной оси.

Пользуясь верхней гранью

$$M_h(z) = \sup_{\mathfrak{M}_h} |P(z)|,$$

где $\mathfrak{M}_h$ есть совокупность всех многочленов $P(z)$, для которых $\sup_{-\infty<x<\infty} h(x)|P(x)| \leqslant 1$, автор вводит в рассмотрение «выравненный» вес

$$h^*(x) = (1+|x|)\left[M_{\frac{h}{1+|x|}}(x)\right]^{-1}$$

и формулирует решение указанной задачи: функция $h(x)$ является весовой тогда и только тогда, когда расходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h^*(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Пусть E_h — множество точек, где $h(x)>0$, C_h — класс всех непрерывных функций $f(x)$, для которых $f(x)h(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$, H — совокупность всех весовых функций и $n(r)$ — число тех точек из E_h, для которых $|x|<r$. Для того чтобы функция $h(x)$ была весовой, необходимо и достаточно, чтобы для любых $R>0$, $N>0$ существовал многочлен $P(x)$ с условиями

$$h(x)|P(x)| \leqslant 1+|x|, \quad -\infty<x<\infty,$$
$$\max_{-R\leqslant x\leqslant R} |P'(x)| > N.$$

Если $h(x)\notin H$, то функции $f(x)$, которые допускают взвешенную, с весом $h(x)$, равномерную аппроксимацию многочленами, совпадают на множестве E_h с целыми функциями не выше первого порядка минимального типа. Если $\overline{\lim}_{r\to\infty} n(r)/r>0$, то при любом $s>0$ функции $h(x)$ и $(1+|x|)^s h(x)$ могут принадлежать к H только одновременно. При выполнении последнего условия, если функция $h(x)$ весовая, то она является также весовой относительно совокупности всех многочленов, не содержащих любого конечного и фиксированного множества положительных степеней x.

Если функция $f(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ и

$$\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1)-f(x_2)|,$$

где верхняя грань распространяется на все пары x_1, x_2, для которых $|x_1-x_2| \leqslant \delta(1+|x_1|)(1+|x_2|)$, то для любого $n>0$ найдется многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$h(x)|f(x)-P_n(x)| < C\omega_f\left(\frac{1}{\ln p_n}\right),$$

где $C>0$ не зависит от n и p_n — верхняя грань значений полиномов степени $\leqslant n$ из $\mathfrak{M}_{\frac{h}{1+|x|}}$ в некоторой точке a с $\operatorname{Im} a\neq 0$.

Приводится также решение задачи С. Н. Бернштейна для случая аппроксимации на любом замкнутом нигде не плотном множестве комплексной плоскости. Доказательства даны в обзорной статье автора (Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 107—152).

А. Ф. Тиман

3911. О полноте некоторых тригонометрических систем. Ципсер, Реньи (Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről. Czipszer János, Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 4, 391—410 (венг.)

Для произвольного комплексного τ рассматриваются следующие системы функций:

$$C(\tau) = \{\cos(k+\tau)x\}, \quad C_1(\tau) = 1 \cup C(\tau),$$
$$S(\tau) = \{\sin(k+\tau)x\}, \quad CS(\tau) = C(\tau)\cup S(\tau),$$
$$C_1S(\tau) = C_1(\tau)\cup S(\tau) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots),$$

именно, первые три рассматриваются в интервале $(0,\ \pi)$, последние две в $(-\pi,\ \pi)$. Определяются значения τ, при которых эти системы функций замкнуты в пространствах C и L^p $(1\leqslant p<\infty)$. Результаты авторов являются обобщением результата К. Шайдукова (РЖМат, 1955, 4345). Типичным является следующее предложение: Система $CS(\tau)$ будет тогда и только тогда замкнута 1) в $C(-\pi,\ \pi)$, когда $\operatorname{Re}\tau \leqslant 1/2$, $\tau\neq 1/2$, 0, $-1/2$, -1, . . .; 2) в $L^p(-\pi,\ \pi)$ $(1<p<\infty)$, когда $\operatorname{Re}\tau \leqslant 1/2 + 1/(2p)$; 3) в $L(-\pi,\ \pi)$, когда $\operatorname{Re}\tau < 1$.

А. Császár

3912. О тригонометрических нуль-рядах. Ивашев-Мусатов О. С., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 3, 438—441

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ называется нуль-рядом, если он сходится к нулю почти всюду на $[0,\ 2\pi]$, но не все его коэффициенты равны нулю.

Для таких рядов $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$. Автор ставит вопрос о скорости, с которой этот ряд расходится, и показывает, что эта скорость может быть в известном смысле любая, лишь бы коэффициенты ряда удовлетворяли известным условиям регулярности. Точнее: Для любой положительной монотонно не возрастающей непрерывной функции $\chi(y)$, заданной на полупрямой $y\geqslant 0$ и обладающей следующими свойствами при $y\to\infty$: 1) $\int_0^y \chi^2(\eta)\,d\eta\to\infty$; 2) $y\chi^2(y)\to 0$; 3) $y^{1+\varepsilon}\chi^2(y)\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$; 4) существует такое $m>1/2$, что $y^m\chi(y)$ растет монотонно, можно построить такой нуль-ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, что $a_n = o(\chi(|n|))$.

Н. К. Бари

3913. О сходимости рядов Фурье функций класса L^p. Госселин (On the convergence of Fourier series of functions in an L^p class. Gosselin Richard P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 392—397 (англ.)

Устанавливаются теоремы о сходимости некоторых подпоследовательностей частных сумм Фурье функций $f(x)\in L^p$ $(1<p\leqslant 2)$.

Теорема 1. Если $f(x)\in L^2$, а последовательность $\{n_k\}$ лакунарна (т. е. $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$ для всех k), то существует последовательность натуральных чисел $\{m_\nu\}$, содержащая в каждом интервале $(n_k,\ n_{k+1})$ r_k последовательных членов и такая, что соответствующая последовательность сумм Фурье $s_{m_\nu}(f,x)$ сходится почти всюду к $f(x)$ $\left(r_k = \left[\frac{n_{k+1}-n_k}{\log n_{k+1}}\right]\right)$.

Теорема 2 при дополнительном условии сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\log n_k)^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha>0$ утверждает то же для функций $f(x)\in L^p$ $(1<p<2)$ с заменой r_k на

$$r_{k,p,\alpha} = \left[\frac{(n_{k+1}-n_k)^{2/p'}}{(\log n_{k+1})^{1+\alpha-2\alpha/p'}}\right], \quad p' = p/(p-1).$$

При доказательстве этих результатов используются теоремы А. Н. Колмогорова о лакунарных рядах

Фурье для функций $f(x) \in L^2$ и их обобщения на пространство L^p, принадлежащие Харди и Литлвуду (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, §§ 10.31, 10.32). И. М. Ганзбург

3914. О логарифмических средних продифференцированных сопряженных рядов к рядам Фурье. Моханти, Нанда (On the logarithmic mean of the derived conjugate series of a Fourier series. Mohanty R., Nanda M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 8, 397—400 (англ.)

Пусть 2π-периодическая функция $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ имеет ряд Фурье

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t), \qquad (1)$$

$$A_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

и пусть

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$h(t) = \varphi(t) \Big/ \left[4 \sin \frac{t}{2}\right] - d, \quad d \equiv d(x).$$

Рассматриваются ряды $-\sum_{k=1}^{\infty} kA_k(x)$, полученные почленным дифференцированием рядов, сопряженных к (1), и устанавливается, что при условии

$$\int_t^{\pi} u^{-1} |h(u)|\, du = o(\log t^{-1}) \quad (t \to 0) \qquad (2)$$

имеет место:

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma_{2n} - \sigma_n) = \frac{d}{\pi} \log 2, \qquad (3)$$

где $\sigma_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} k^{-1} S_k(x)$, $S_k(x)$ — k-я частная сумма ряда $-\sum_{k=1}^{\infty} kA_k(x)$

При доказательстве используются результаты работы Мисра (Misra M. L., Quart. J. Math., 1947, 18, 147—156).

Примечание референта. Как это видно из доказательства, при условии (2) справедливо более общее утверждение, чем (3):

$$\sigma_m - \sigma_n \sim \frac{d}{\pi} \log \frac{m}{n} \quad (m > n, \ n \to \infty),$$

где $\sim$ означает асимптотическое равенство.

В работе имеется ряд опечаток: в формулировке теоремы, а также на стр. 399 (строки 11, 13 и 14 сверху) и на стр. 400 (строка 11 сверху) вместо 2^n должно быть $2n$. В этой же строке 11 O надо заменить на o. И. М. Ганзбург

3915. Исследование интегралов и производных дробных порядков методами конструктивной теории функций. Кралик (Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie. Králik D.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 49—64 (нем.; рез. русск.)

Рассматриваются функции $f(x) \in L(0, 2\pi)$ периода 2π, для которых интеграл по периоду равен нулю. Пусть $f_\alpha(x)$ — интеграл порядка α ($\alpha > 0$), $f^{(r)}(x)$ — производная порядка r ($r > 0$) в смысле Вейля функции $f(x)$, а $\sigma_n(f, x)$ — n-я сумма Фейера для $f(x)$. Доказывается:

1) Если $f(x)$ и сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ принадлежат $L[0, 2\pi]$, то для $0 < \alpha < 1$

$$\| \sigma_n(f_\alpha, x) - f_\alpha(x) \|_L = O(n^{-\alpha})$$

и почти всюду

$$|\sigma_n(f_\alpha, x) - f_\alpha(x)| = O(n^{-\alpha}), \qquad (1$$

причем константа, входящая в правую часть (1) может зависеть от x.

2) Для функций $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(1 < p < \infty)$ справедливо

$$\| \sigma_n(f_\alpha, x) - f_\alpha(x) \|_{L^p} = O(n^{-\alpha}) \qquad (2$$

и $|\sigma_n(f_\alpha, x) - f_\alpha(x)| \leqslant g(x)\, n^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$ $g(x) \in L^p[0, 2\pi]$.

3) Для функций $f(x) \in \mathrm{Lip}(\beta, p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ левая часть соотношения (2) есть $O(n^{-\alpha-\beta})$ $(0 < \alpha < 1$ $0 < \alpha + \beta < 1)$.

4) Если $0 < r < \alpha$, а $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(0 < \alpha \leqslant 1$ $1 < p < \infty)$, то $f^{(r)}(x)$ существует и

$$\| \sigma_n(f^{(r)} x) - f^{(r)}(x) \|_{L^p} = O(n^{r-\alpha}).$$

Из оценок приближений $f_\alpha(x)$ и $f^{(r)}(x)$ в 2), 3) и 4) вытекают соответственно следующие результаты: 2') $f_\alpha(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$; 3') $f_\alpha(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha + \beta, p)$; 4') $f^{(r)}(x) \in$ $\in \mathrm{Lip}(\alpha - r, p)$, впервые установленные Харди и Литлвудом другим путем (Hardy G. H., Littlewood J. E., Math. Z., 1928, 27, 565—606).

Кроме того, рассматривается класс $\mathrm{Lip}(\alpha - 0, p)$, являющийся пересечением классов $\mathrm{Lip}(\alpha - \varepsilon, p)$ для любого $\varepsilon > 0$, и указываются его конструктивные свойства. Исследования автора примыкают к работам Алексича (Alexits G., Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3, 29—40, РЖМат, 1956, 5805) и основаны на некоторых результатах из теории рядов, доказываемых автором. И. М. Ганзбург

3916. К вопросу о приближении периодических квазигладких функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица. Морозов М. И., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып. 61, 41—57

Пусть $KH^{(\alpha)}$ обозначает класс непрерывных периода 2π функций $f(x)$, удовлетворяющих при любых x и h условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant K |h|^{\alpha},$$

где $K > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, и пусть

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \mu_m^{(n)} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

где $\mu_m^{(n)}$ $(m = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ — такая система чисел, что

$$K_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \mu_m^{(n)} \cos mu \geqslant 0,$$

a_m и b_m — коэффициенты Фурье функции f. Положим

$$\rho_n^{(\alpha)} = \sup_{f \in H^{(\alpha)}} \max_x |f(x) - U_n(f, x)|.$$

В работе даются асимптотически точные значения $\rho_n^{(\alpha)}$ при любом $K_n(u) \geqslant 0$, а также для некоторых конкретных значений $\mu_m^{(n)}$, и приводятся аналогичные результаты для функций двух переменных.

Эти результаты являются развитием соответствующих результатов С. М. Никольского (Изв. АН СССР сер. матем., 1940, 4, 501—508), Надя (Nagy B., Acta

scient. math. Szeged, 1946, 11, 71—84) и А. С. Безлюдного (1948, диссертация), рассмотревших случай класса функций, удовлетворяющих условию Липшица степени α.

Примечание референта. В работе много ошибок и опечаток. Так, в формуле (13) (стр. 43) вместо периодической функции подставляется непериодическая функция. В правой части соотношения (30) (стр. 46) стоит лишний множитель 2. Заметим еще, что выражение уклонения функции от ее сумм Фейера имеется в книге Валле-Пуссена (Vallée-Poussin Ch.-J., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919, стр. 31). Теоремы 2 и 3 также нуждаются в уточнениях. А. В. Ефимов

3917. Об одном соотношении в теории суммирования интерполяционных полиномов и рядов Фурье. Погодичева Н. А., Тиман А. Ф., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 3, 542—543

Пусть $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots, n+1;\ \lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0;\ n=1, 2, \ldots)$ — заданная система чисел, образующая бесконечную треугольную матрицу. Пусть далее

$$u_n(f, x, \lambda)=a_0/2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \quad (1)$$

$$\tilde{u}_n(f, x, \lambda)=a_0^{(n)}/2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\left(a_k^{(n)}\cos kx+\right.$$
$$\left.+b_k^{(n)}\sin kx\right), \quad (2)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f\in C$ периода 2π и $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$ — эти же коэффициенты, но приближенно вычисленные по формуле прямоугольников, когда период делится на $2n+1$ частей (при $\lambda_k^{(n)}\equiv 1$ u_n, таким образом, есть тригонометрический полином порядка n, интерполирующий f в точках $x_k=2k\pi/(2n+1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Пусть, наконец, L_n и $L_n(x)$ — соответственно константы Лебега сумм (1) и (2).

Авторы доказывают, что если числа $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$ равномерно ограничены и при каждом n образуют выпуклую или вогнутую систему чисел, то имеет место асимптотическое равенство

$$L_n(x)=\frac{\pi}{2}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|L_n+O(1) \quad (3)$$

равномерно относительно x.

Ранее было известно, что при любых $\lambda_k^{(n)}$ величины $L_n(x)$ и L_n имеют один и тот же порядок (Marcinkiewicz J., Zygmund A., Fundam. math., 1937, 28). Авторы отмечают также, что само асимптотическое равенство (3) было известно в отдельных конкретных случаях (Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, 509; Тиман А. Ф., Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 263). При этом в указанной работе А. Ф. Тимана равенство (3) относится к случаю $\lambda_k^n=\cos\frac{2kp\pi}{2n+1}$, где, таким образом, числа $\lambda_k^{(n)}$ не удовлетворяют условию выпуклости.

С. М. Никольский

3918. Об одном методе приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, тригонометрическими полиномами. Калашников (Про один метод наближення функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, тригонометричними поліномами. Калашников М. Д.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 4, 325—329 (укр.; рез. русс.)

Рассматривается тригонометрический полином

$$\sigma_n^N(f, x)=\frac{1}{N(n+1)}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x_k-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_k-x)}\right]^2,$$

$$N\geqslant 2n+1,\ x_k=2k\pi/N,$$

который при $N=2n+1$ обращается в интерполяционную сумму Фейера для $f(x)$, а при $N=m(2n+1)$ в пределе, когда $m\to\infty$, переходит в сумму Фейера.

С. М. Никольский (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, 501) нашел асимптотическое выражение верхних граней (по классу функций, удовлетворяющих $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с данной константой) отклонений сумм Фейера и интерполяционных сумм Фейера от функции $f(x)$ при $n\to\infty$. Автор решает ту же задачу для $\sigma_n^N(f, x)$. В случае $\alpha=1$ асимптотические выражения для сумм Фейера и $\sigma_n^N(f, x)$ совпадают. То же получается при $n/N\to 0$ в случае $\alpha<1$.

И. Г. Соколов

3919. Об одном новом методе построения вейерштрассовых интерполяционных формул. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 679—682.

Доказывается, что если для непрерывной функции $f(x)$ образовать многочлен

$$U_{n, m}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(x_j^{(n)}\right)\left[T_{n, m}(\theta+\theta_j)+T_{n, m}(\theta-\theta_j)\right],$$

где

$$T_{n, m}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2n-m-1}\cos kt+\sum_{k=2n-m,\ k\neq n}^{m}\lambda_k^{(m)}\cos kt,$$

$\lambda_{2n-k}^{(m)}=1-\lambda_k^{(m)}$ для $k=2n-m, \ldots, n-1$, $x=\cos\theta$, $\theta_j=(2j-1)\pi/(2n)$, то $U_{n, m}(x_j)=f\left(x_j^{(n)}\right)$, где $x_j^{(n)}=\cos\theta_j$ (теорема 1); $U_{n, m}(x)=f(x)$ для любого многочлена $f(x)$ степени $<2n-m$ (теорема 2); при некоторых условиях, наложенных на числа $\lambda_k^{(m)}$ и при соблюдении неравенств $1+\delta_1<m/n<1+\delta_2$, где δ_1 и δ_2 — произвольные положительные фиксированные числа, имеем $\lim\limits_{m, n\to\infty}\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|U_{n, m}(x)-f(x)|=0$ (теорема 3). Из теорем 1 и 2 вытекает (теорема 4), что если многочлен $P(x)$ степени $<2n-m$ удовлетворяет неравенствам $\left|P\left(x_j^{(n)}\right)\right|\leqslant 1$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то для $x\in[-1, 1]$

$$|P(x)|\leqslant\frac{1}{n}\inf_{\lambda}\sum_{j=1}^{n}|T_{m, n}(\theta+\theta_j)+T_{n, m}(\theta-\theta_j)|.$$

Доказательства не приводятся.

Примечание референта. В заметке есть опечатки и неточные формулировки. Теорема 5 ненужна, так как она отличается от теоремы 3 только добавочной гипотезой. На стр. 680[1] (строка 1 сверху) вместо (3) должно быть (2), стр. 137; на стр. 680[12] вместо $\varphi(m)\to 0$ должно быть $\varphi(m)\to\infty$; подстрочное замечание на стр. 681 надо отнести к неравенствам (13).

С. Ф. Пашковский

3920. Об оценке производных многочленов многих переменных. Исмайлов А. Я., Мә'рузәләри

АзәрбССР Элмләр Акад., Докл. АН АзербССР, 1956, 12, № 4, 239—243 (рез. азерб.)

Приводится без доказательств ряд неравенств для тригонометрических и алгебраических многочленов многих переменных. Они являются обобщениями соответствующих неравенств С. Н. Бернштейна, А. А. Маркова, И. И. Привалова, Д. Джексона, С. М. Никольского и Н. К. Бари.

Пусть

$$T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{k_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=-m_n}^{m_n} c_{k_1 \dots k_n} e^{i \sum_{s=1}^{n} k_s x_s}$$

— тригонометрический полином, $-\pi < a_k < a_k' < b_k' < b_k < \pi$ и $L_p^{(n)}(a_k, b_k)$ — пространство функций, суммируемых в p-й степени $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в n-мерном параллелепипеде $D = \{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ k = 1, \dots, n\}$. Приведем в качестве примера неравенства

$$\left\| \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} T_{m_1 \dots m_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{L_p^{(n)}(a_k', b_k')} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \| T_{m_1 \dots m_n} \|_{L_p^{(n)}(a_k, b_k)} \prod_{k=1}^{n} m_k^{i_k},$$

$$\| T_{m_1 \dots m_n} \|_{L_{p'}^{(n)}(a_k', b_k')} \leqslant C_2 \| T_{m_1 \dots m_n} \|_{L_p^{(n)}(a_k, b_k)} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} m_k^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)}, \quad 1 \leqslant p < p' < \infty.$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят от a_k, a_k', b_k, b_k', $k = 1, \dots, n$. В случае $-\pi = a_k = a_k'$ и $\pi = b_k = b_k'$ эти неравенства были получены С. М. Никольским (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 244—278), а для случая $n = 1$ и внутренних отрезков — Н. К. Бари (РЖМат, 1953, 1142; 1955, 3699). Если в левых частях приведенных неравенств нормы брать по параллелепипеду D, то верны аналогичные неравенства, в правых частях которых вместо m_k берется m_k^2. Эти последние неравенства в случае $n = 1$ были доказаны Н. К. Бари (РЖМат, 1955, 3699).

В заметке имеется еще ряд неравенств как для тригонометрических, так и для алгебраических многочленов, являющихся обобщениями в том или ином смысле ранее известных. Большое количество опечаток и неточностей формулировок затрудняет чтение статьи. Л. Д. Кудрявцев

3921. Об одной экстремальной задаче теории полиномов, монотонных на интервале $(-a, +a)$ $(a \geqslant 1)$. **Григорьева И. А.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 149—156

Решена задача о нахождении минимальной осцилляции в промежутке $[-1, 1]$ полинома $y_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} p_i x^{2n+1-i}$, монотонно возрастающего в промежутке $[-a, a]$ $(a \geqslant 1)$, если заданы старший коэффициент этого полинома и значение его первой производной в некоторой фиксированной точке η

$$(p_0 = 1,\ y_{2n+1}'(\eta) = A^2,\ |\eta| \leqslant a).$$

Эта задача аналогична некоторым задачам, рассмотренным референтом (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 6, 1029—1032). Б. А. Рымаренко

3922. К проблеме моментов для конечного промежутка. **Берман Д. Л.,** Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 895—898

Рассматривается треугольная матрица узлов $\{x_k^{(n)}\}$ $(k = 0, 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots)$ на отрезке $[0,1]$ и каждой функции $f \in C$ сопоставляется оператор

$$H_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(x_j^{(n)}\right) h_j^{(n)}(x),$$

обладающий следующими свойствами: 1) многочлены $h_j^{(n)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0,1]$, степени $\leqslant n$, 2) если $f(x)$ — многочлен степени $m = \varphi_0(n)$, то $H_n(f, x)$ — многочлен степени $\leqslant m$; $\varphi_0(n)$ — целочисленная функция, причем $\lim_{n \to \infty} \varphi_0(n) = \infty$, $\varphi_0(n) \leqslant n$; 3) если $f \in C$, то равномерно в $[0,1]$ имеем $\lim_{n \to \infty} H_n(f, x) = f(x)$. Если задана последовательность вещественных чисел $\{\mu_k\}$, то в пространстве многочленов $\{p_n(x)\}$ можно определить функционал

$$\sigma_n\{p_n(x)\} = \sigma_n\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right\} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu_k.$$

Автор находит условия, необходимые и достаточные для того, чтобы последовательность $\{\mu_k\}$ была моментной, т. е. чтобы имело место представление

$$\int_0^1 x^n dg(x) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где функция $g(x)$ удовлетворяет одному из четырех условий: 1) $g(x)$ — возрастающая функция; 2) $g(x)$ — функция ограниченной вариации; 3) $dg(x) = \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция; 4) $dg(x) = \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x) \in L_2$. Если в качестве $H_n(f, x)$ взять многочлен С. Н. Бернштейна, то получатся результаты Хаусдорфа; из них и из полученных результатов автор получает новые результаты. В заключение показано, как построить оператор $H_n(f, x)$.

Я. Л. Геронимус

3923. Некоторый класс решений проблемы моментов. **Уэйсс** (A certain class of solutions to a moment problem. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 851—853 (англ.)

Рассматривается последовательность вещественных чисел $\{\mu_k\}_0^n$; при некоторых условиях существует по крайней мере одна функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, неотрицательная на $[-1, 1]$, являющаяся решением укороченной проблемы моментов

$$\int_{-1}^{1} f(x) x^i dx = \mu_i,\ \mu_0 = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

класс таких функций обозначен через $\{f\}$. Автор доказывает, что существует функция $g \in \{f\}$, экстремальная для задачи о нахождении

$$M = \inf_{f \in \{f\}} \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx,$$

причем функция $g(x)$ почти всюду на $[-1, 1]$ совпадает с некоторым многочленом степени $\leqslant n$ в тех точках, где он неотрицателен, и равна нулю в остальных точках $[-1, 1]$. Обобщением этого результата является теорема: Пусть даны ограниченное множество S положительной меры, измеримые на нем функции $\{h_i(x)\}_0^n \in L_2(S)$ и последовательность вещественных чисел $\{m_i\}_0^n$, и пусть существует хотя бы одна измеримая функция $f(x) \in L_2(S)$ неотрицательная почти всюду на S, являющаяся решением обобщенной укороченной проблемы моментов

$$\int_S f(x)\, h_i(x)\, dx = m_i \ (i = 0, 1, \ldots, n);$$

класс таких функций обозначен через $\{f\}$. Тогда существует измеримая функция $g(x) \in \{f\}$, однозначно определенная почти всюду на S, для которой

$$M = \inf_{f \in \{f\}} \int_S f^2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} g^2(x)\, dx;$$

эта функция равна $\sum_{k=0}^{n} a_k h_k(x) = L_n(x)$ в точках, где $L_n \geqslant 0$, и равна нулю в остальных точках множества S. Я. Л. Геронимус

3924 Д. **Исследования по теории приближения функций интерполяционными полиномами. Берман Д. Л.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

3925 Д. **Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике L_p. Потапов М. К.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

См. также: 3937, 4120, 4149, 4167, 4319

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3926. **Конформное отображение и риманова поверхность. Жизен** (Représentation conforme et surface de Riemann. Gysen E.), Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. et génie, 1956, 34, № 3, 19—32 (франц.; рез. флам.)

Реферируемая статья, представляющая собою первую из публикаций, в которых автор собирается остановиться на вопросах теории функций, особенно важных для приложений в физике и механике, посвящена, главным образом, изложению свойств элементарных функций и отображений, которые можно совершить с помощью этих функций. Содержащиеся в статье сведения по затронутым вопросам не выходят за пределы сведений, включаемых обычно в учебники по теории функций. При этом изложение геометрического смысла производной проведено неаккуратно. Г. Ц. Тумаркин

3927. **О функциях, порожденных тотально положительными последовательностями. I. Эйссен, Шёнберг, Уитни** (On the generating functions of totally positive sequences. I. Aissen Michael, Schoenberg I. J., Whitney A. M.), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 93—103 (англ.; рез. евр.)

Последовательность действительных чисел $a_0 = 1$, a_2, $a_3, \ldots$ называется тотально положительной, если все миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

порядков 1, 2, 3... неотрицательны. Доказывается теорема: Если $\{a_n\}$ — тотально положительная последовательность, то ряд $f(z) = \sum a_n z^n$ сходится в некоторой окрестности начала, функция $f(z)$ является мероморфной и имеет форму

$$f(z) = e^{g(z)} \frac{\prod_1^\infty (1 + \alpha_\nu z)}{\prod_1^\infty (1 - \beta_\nu z)}. \qquad (1)$$

Здесь $\alpha_\nu \geqslant 0$, $\beta_\nu \geqslant 0$, ряд $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ сходится, $g(z)$ — целая функция. А. Ф. Леонтьев

3928. **О функциях, порожденных тотально положительными последовательностями. II. Эдрей** (On the generating functions of totally positive sequences. II. Edrei Albert), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 104—109 (англ.; рез. евр.)

Продолжение заметки (реф. 3927). Показывается, что в представлении (1) из указанной выше заметки функция $g(z)$ является линейной: $g(z) = c_1 z$, $c_1 \geqslant 0$. А. Ф. Леонтьев

3929. **О нулях частных сумм степенного ряда. Краснощекова Т. И.,** Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып. 61, 37—40

Рассматривается степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \quad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = 1\right)$$

и последовательность его частных сумм $\{S_n(z)\}$. Изучается расположение нулей последовательности $\{S_n(z)\}$. С помощью свойств нормальных семейств доказываются две теоремы: теорема Иенча о том, что все точки окружности $|z| = 1$ являются предельными для нулей частных сумм ряда, а также теорема 1: Если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, то число нулей любой функции $S_n(z)$ из последовательности $\{S_n(z)\}$ ограничено в области $|z| > 1 + \delta$, где δ — любое сколь угодно малое положительное число. Теорема 1 обобщает результат Идзуми (Izumi S., Japan. J. Math., 1927, 4, 28—32), рассмотревшего случай $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

Н. М. Дайнеко

3930. **Некоторые свойства полиномов Фейера. Херцог, Пиранян** (Some properties of the Fejér polynomials. Herzog Fritz, Piranian George), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 379—386 (англ.)

Изучается распределение нулей полиномов

$$P_n(z) = \frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1} - \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+1}}{2} - \ldots - \frac{z^{2n-1}}{n},$$

введенных Фейером, а также точная верхняя граница $|P_n(z)|$ на $|z| = 1$. Недавно были указаны новые приложения этих полиномов в изучении ряда Тейлора (РЖМат, 1955, 1160; 1956, 2131). Доказаны следующие две теоремы.

1. Полином $P_n(z)$ имеет нуль в точке $z = 1$, не имеет других положительных нулей и никаких

других нулей на $|z|=1$. Он не имеет отрицательных нулей, если n — нечетное, если n — четное, он имеет два отрицательных нуля, которые даны асимптотически формулой

$$z=-[n\ln 16+o(n)]^{\pm 1/n}.$$

Каждый из $(n-1)$ секторов $(2k-1)\pi/n<\arg z<(2k+1)\pi/n$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ содержит точно два нуля $P_n(z)$. Для $\varepsilon>0$ и n достаточно большого каждый из нулей полинома $P_n(z)/(1-z)$ лежит в одном из колец

$$1-\frac{(4+\varepsilon)\ln n}{n}<|z|<1-\frac{2e^{1/2}-\varepsilon}{n},$$

$$1+\frac{(4+\varepsilon)\ln n}{n}>|z|>1+\frac{2e^{1/2}-\varepsilon}{n}.$$

2. Если обозначить $M_n=\max\limits_{|z|=1}|P_n(z)|$, то

$$M_n\to 2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=3{,}704\ldots$$

Доказательство теоремы 2 основано на использовании явления Гиббса. Авторы также отмечают, не приводя доказательства, что константа в теореме 2 является точной нижней границей чисел M_n $(n=1,2,\ldots)$.

С. Я. Альпер

3931. Об интерполировании на окружности. **Шун М. С., Гройсер М. Д.,** Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1955, вып. 16, 127—129

Рассматриваются интерполяционные полиномы вида

$$P_{2n-2}(f;\,z)=\sum_{k=0}^{n-1}l_k^2(z)\,f(z_k),$$

где $l_k(z)$ — основные полиномы интерполяционной формулы Лагранжа с узлами $z_k=e^{i\theta k}$, $\theta_k=\dfrac{2\pi}{n}k$, $k=0,1,\ldots,n-1$; $n=1,2,3,\ldots$ Доказывается, что а) если $f(z)$ непрерывна на окружности $|z|=1$, то для любой точки окружности:

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n-2}(f;\,z)\cdot z^{-n}=f(z);\qquad(1)$$

б) если $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant 1$, то соотношение (1) выполняется равномерно в этом круге.

В. Ф. Николаев

3932. Интегрирования по границе круга сходимости и расходимость интерполяций. I. **Какехаси** (Integrations on the circle of convergence and the divergence of interpolations. I. Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 6, 329—333 (англ.)

Рассматривается треугольная матрица, содержащиеся в n-й строке этой матрицы точки z_k^n, $k=1,2,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$ с условием $\left|z_k^{(n)}\right|\leqslant 1$ для всех k и n и такие, что последовательность

$$w_n(z)/z^n=\left(z-z_1^{(n)}\right)\left(z-z_2^{(n)}\right)\ldots\left(z-z_n^{(n)}\right)/z^n$$

сходится к функции $\lambda(z)$, однозначной, аналитической и не обращающейся в нуль в области $|z|>1$, причем сходимость равномерная на каждом ограниченном замкнутом множестве, лежащем в этой области. Через $K_\rho(\rho>0)$ обозначается класс аналитических в $|z|<\rho$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{z}{\rho}\right)^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\rho e^{i\vartheta}-z}\,dF(\vartheta)\quad(\rho>0),$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\vartheta}\,dF(\vartheta);\quad n=0,\,1,\,2,\ldots$$

и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|c_n|>0$, где $F(\vartheta)$ — комплексная функция ограниченной вариации, нормированная условиями $F(0)=0, F(\vartheta-0)=F(\vartheta)$.

Доказывается следующая теорема: Если $f(z)$ — функция класса $K_\rho(\rho>1)$ и $P_n(z,\,f)$ — интерполяционный полином n-й степени, совпадающий с $f(z)$ во всех точках $(n+1)$-й строки матрицы, удовлетворяющей приведенным условиям, то последовательность $P_n(z,\,f)$ расходится в каждой точке области $|z|>\rho$. Более того, мы имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|(\rho/z)^nP_n(z,\,f)|>0$ для $|z|>\rho>1$.

С. Я. Альпер

3933. Разложение коэффициентов степенного ряда и расходимость интерполяционных полиномов. **Какехаси** (The decomposition of coefficients of power-series and the divergence of interpolation polynomials. Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 517—523 (англ.)

Обобщая свои ранее полученные результаты о расходимости интерполяционных полиномов (реф. 3932), автор доказывает следующую теорему: Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в круге $|z|<\rho$, $\rho>1$, но не являющаяся аналитической на $|z|=\rho$, и $P_n(z,\,f)$ — интерполяционный полином n-й степени, совпадающий с $f(z)$ во всех точках $(n+1)$-й строки матрицы, удовлетворяющей условиям, приведенным в реф. 3932, тогда последовательность $P_n(z,f)$ расходится в каждой точке области $|z|>\rho$. Более того, мы имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|P_n(z,f)|^{1/n}=|z|/\rho\ \text{для}\ |z|>\rho>1.$$

С. Я. Альпер

3934. Симметрическое обобщение интерполяционной формулы Лагранжа. **Швейцер** (A symmetric generalization of the Lagrange interpolation formula. Schweizer Berthold), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 3, 157—159 (англ.)

Для полинома $G(x)$ степени $n(k+1)-1$ такого, что в n данных различных точках $x_1,\,x_2,\ldots,x_n$ значения полинома и его k первых производных совпадают со значениями данной функции $f(x)$ и ее производных $f'(x),\,f''(x),\ldots,f^{ik}(x)$ требуется найти выражение в такой форме, чтобы симметрический характер зависимости $G(x)$ от переменных $x_1,\,x_2,\ldots,x_n$ был непосредственно виден. Автор получает ответ в виде

$$G(x)=\sum_{p=0}^{k}\left\{\sum_{i=1}^{k}A_{p,i}l_i(x)\right\}\omega^p(x),$$

где $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $l_i(x)=[\omega(x)/\omega'(x_i)]\times(x-x_i)^{-1}$; $A_{p,i}$ означает некоторую разделенную разность порядка np функции $f(x)$.

Примечание референта. Выражение для $G(x)$ в виде, симметричном относительно $x_1,\,x_2,\ldots,x_n$, можно сразу получить из общей интерполяционной формулы Эрмита (см., например, Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций, изд. 2, М., Гостехиздат, 1954, стр. 64; РЖМАТ, 1956, 331 К).

В. Ф. Николаев

3935. Пределы рациональных функций. Мак-Лейн (Limits of rational functions. Mac Lane Gerald R.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 111—116 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая z-плоскости и D — одна из двух областей, определенных с помощью Γ. Если $f(z)$ — голоморфная функция и $\neq 0$ в D, то существует последовательность $\{R_n(z)\}$ рациональных функций такая, что все нули и полюсы $R_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, лежат на Γ и $\{R_n(z)\}$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри D.

Здесь же доказывается еще две теоремы, из которых, в частности, следует, что известная теорема Линдварта и Пойа о последовательности полиномов с действительными нулями (см., например, Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956, гл. VIII, § 1) не может быть распространена на последовательность рациональных функций, нули и полюсы которых действительны. Т. И. Краснощекова

3936. Об асимптотическом представлении многочленов, ортогональных на единичной окружности. Кузьмина А. Л., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 6, 793—795

Автор рассматривает многочлены $\{p_n(z)\}$, ортонормальные на единичной окружности относительно веса $p(\theta)=\lim\limits_{z\to t}|f(z)|^2$, $t=e^{i\theta}$, где функция $f(z)$ регулярна в области $|z|>1$, непрерывна и неравна нулю в замкнутой области $|z|\geqslant 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|z|=1$; при этих предположениях справедлива асимптотическая формула:

$$p_n(t)=\frac{t^n}{\sqrt{2\pi}f(t)}+o(1),\quad t=e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

равномерно по θ на отрезке $[0,2\pi]$; отсюда легко получается асимптотическая формула для многочленов, ортонормальных на отрезке $[-1,+1]$.

Примечание референта. 1) Ограничительные условия естественно накладывать на вес $p(\theta)$, а не на функцию $f(z)$, которая непосредственно не задается — если же накладывать ограничение на функцию $f(z)$, то достаточно предположить, что $f(z)\in H_1$ и имеет ограниченную вариацию на окружности $|z|=1$; отсюда по теореме Ф. и М. Рисс вытекает ее непрерывность в замкнутой области $|z|\geqslant 1$ и абсолютная непрерывность на окружности $|z|=1$; 2) Результат автора вытекает как частный случай из теоремы 1 референта (РЖМат, 1957, 2213), которая позволяет также оценить погрешность асимптотической формулы. Я. Л. Геронимус

3937. Метод аппроксимирования характеристик электрических сетей рациональными функциями. Де-Кларис (A method of rational function approximation for network synthesis. DeClaris N.), IRE Convent. Rec., 1955, 3, № 2, 51—58 (англ.)

Вид электрической сети, зависящий от того, содержит ли сеть два типа элементов (RC или RL) или все три типа (RLC), определяется расположением полюсов импедансной функции $Z(s)$ комплексного переменного $s=\sigma+j\omega$.

Единичная импульсная функция $h(t)$ связана с действительной частью $U(\gamma_0,\lambda)$ соответствующей импедансной функции $F(s)$, где $s=\gamma_0-i\lambda$, соотношением

$$U(\gamma_0,\lambda)=\int_0^\infty e^{-\gamma_0 t}h(t)\cos\lambda t\,dt,$$

причем

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt,\quad h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}e^{ts}F(s)\,ds;$$

функция $F(s)$ должна быть аналитической в правой полуплоскости. Потребуем, чтобы $F(s)$ в левой полуплоскости имела полюсы в точках a_i $(i=1,2,\ldots,n)$, где $\operatorname{Re}a_i>0$.

Возникает задача аппроксимирования функции $F(s)$ с помощью рациональной функции $Z(s)$ вида

$$Z(s)=\frac{p_0+p_1s+\ldots+p_ms^m}{\prod_{i=1}^n(s-a_i)},$$

причем $m\geqslant n+1$.

Далее автор приводит ряд результатов по теории интерполяции и апроксимации в комплексной области и показывает их применение в рассматриваемых вопросах, например, теорему 1:

Для того чтобы рациональная функция

$$R_n(z)=[B_nz^n+B_{n-1}z^{n-1}+\ldots+B_0]/\prod_{i=1}^n(z-\alpha_i),$$

где $|\alpha_i|>1$, давала наилучшее среднее квадратичное приближение на единичной окружности C к функции $f(z)$, аналитической внутри и на C, необходимо и достаточно чтобы функция $R_n(z)$ интерполировала функцию $f(z)$ в точках $0,1/\bar{\alpha}_i$, т. е. $R_n(0)=f(0)$, $R_n(1/\bar{\alpha}_i)=f(1/\bar{\alpha}_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Ю. Л. Рабинович

Примечание редакции: Приводимые автором общие результаты по теории интерполяции и аппроксимации хорошо известны и могут быть найдены, например, в книге Уолша (Walsk, Interpolation und approximation by rational functions in the complex domain, New York, 1935), которая не указана автором в библиографии.

3938. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Бадалян Г. В., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1955, 8, № 5, 1—28 (рез. арм.)

Последовательность чисел $-\frac{1}{2}<\gamma_0\leqslant\gamma_1\leqslant\ldots\leqslant\gamma_n\leqslant\ldots$ такова, что $\ldots\leqslant\gamma_{k_{m-1}}<\gamma_{k_m}=\gamma_{k_m+1}=\ldots=\gamma_{k_{m_1}}<\gamma_{k_{m_1}+1}\leqslant\ldots$

Пусть ν — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$0\leqslant\nu\leqslant k_{m_1}-k_m$$

и $\omega_{k_m+\nu}(x)=x^{\gamma_{k_m}}(\ln x)^\nu$. Тогда система $\{p_n(x)\}$ квазимногочленов (линейных комбинаций функций $\omega_n(x)$) ортонормальна на $[0,1]$ по весу $p(x)=x^\alpha$ $(\alpha\geqslant 0)$, если

$$p_n(x)=\frac{\sqrt{2\gamma_n+1+\alpha}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{C_n}\frac{\prod_{\nu=0}^n(\zeta+\gamma_\nu+1+\alpha)\,x^\zeta}{(\zeta+\gamma_n+1+\alpha)\prod_{\nu=0}^n(\zeta-\gamma_\nu)}\,d\zeta\,(n=0,1,2,\ldots),$$

где C_n — окружность $|\zeta-\gamma_n|=\gamma_n+1/2$.

В частных случаях, квазимногочлены $\{p_n(x)\}$ обращаются в обычные многочлены Лежандра, Якоби $\left(J_n^{(\alpha,0)}(x)\right)$, Лагерра, Эрмита.

Система квазимногочленов $\{p_n(x)\}$ используется для обобщения известной теоремы Мюнца.

Ряды Фурье по системе функций $\{P_n(x)=p_n(e^{-x})\}$ применяются в теории моментов в классе функций $e^{-x/2}\psi(x)\in L^2(0,\infty)$ и к решению ряда экстремальных задач. Б. А. Рымаренко

3939. Области равнинного рельефа аналитических функций и их производных. Джонсон (Regions of flatness for analytic functions and their derivatives. Johnson Guy, Jr), Duke Math. J., 1956, 23, № 2, 209—217 (англ.)

Понятие областей равнинного рельефа (regions of flatness) было введено Уиттекером (Whittaker J. M., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1930—1931, ser 2, 2, 111—128): это области, в которых максимум и минимум модуля будут иметь в некотором смысле одинаковый порядок.

В работе Мандельбройта и Ульриха (Mandelbroyt S., Ulrich F. E., Duke Math. J., 1951, 18, 549—556) приведенное выше понятие развивалось для круговых областей и давались условия, при выполнении которых заданное множество областей будет областями равнинного рельефа для последовательных производных аналитической функции. В этой работе соответствующие результаты устанавливаются для произвольных односвязных областей. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области G и S — множество односвязных областей $D \subset G$. Через $\omega(w)$ обозначим конформное отображение круга $|w|<1$ на область D, через $D(h)$ — образ $|w|<h<1$ при этом отображении. Далее предполагается, что при любом h во всех $D(h)$ $f(z) \neq 0$, за исключением, быть может, конечного числа областей, зависящего от h. Автор называет области D множества S областями равнинного рельефа функции $f(z)$, если семейство функций $F(w) = f[\omega(w)]$ будет нормальным в $|w|<1$. Введение такого определения оправдывается тем, что согласно теореме Мандельбройта о необходимом и достаточном условии для нормальности семейства функций (Mandelbroyt S., J. math. pures et appl., 1929, 8, 173—195) в каждой области $D(h)$, за исключением, быть может, конечного числа, будет выполняться одно из следующих неравенств:

$$A^{-1} \leqslant \frac{\ln \max |f(z)|}{\ln \min |f(z)|} \leqslant A \quad \text{или} \quad 1 \leqslant \frac{\max |f(z)|}{\min |f(z)|} \leqslant A.$$

В доказываемых далее теоремах даются условия, при выполнении которых области равнинного рельефа для аналитической функции $f(z)$ будут являться также областями равнинного рельефа и для производных этой функции. Г. Ц. Тумаркин

3940. О кернфункциях с весом. Нехари (On weighted kernels. Nehari Zeev), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 126—149 (англ.; рез. евр.)

Рассматриваются кернфункции области D на плоскости переменного $z = x + iy$, получающиеся при различном выборе веса $\rho(z)$. Полагая норму регулярной в области D функции $f(z)$ равной либо $\|f\| = \iint_D \rho(z)\,|f(z)|^2\,d\omega$ (здесь $d\omega = dxdy$) либо $\|f\| = \int_L \rho(z)\,|f(z)|^2\,ds$ (здесь L — граница D), автор получает кернфункции, являющиеся обобщениями соответственно кернфункций Бергмана или Сеге (получающихся при $\rho \equiv 1$). Автор устанавливает ряд связей между определяемыми таким образом кернфункциями области, в частности указывает способ получения кернфункции, отвечающей данному весу $\rho(z)$ путем процесса последовательных приближений, использующего кернфункции, соответствующие другим весам. Б. А. Фукс

3941. Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру. Суворов (On the prime ends of a sequence of plane regions converging to a nucleus. Suvorov G. D.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, I, 67—93 (англ.)

Перевод из журнала «Математический сборник» (РЖМат, 1954, 1627).

3942. О конформном отображении переменных областей. Гайер (Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete. Gaier Dieter), Math. Z., 1956, 64, № 4, 385—423 (нем.)

Пусть функции $w = f_n(z)$, $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ конформно отображают круг $|z|<1$ на области G_n ($n = 1, 2, \ldots$), не содержащие ∞. Работа в основном посвящена решению следующих вопросов: Какие условия нужно наложить на последовательность областей $\{G_n\}$, чтобы была обеспечена равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$, к f_0 в открытом круге $|z|<1$? Какие условия обеспечат сходимость обратных функций $\{f_n^{-1}\}$ к f_0^{-1} в $\overline{G}_0$? Из большого числа сходных между собою по характеру результатов, полученных автором в указанных направлениях, приведем только два, наиболее общих:

1. Пусть q — сечение G_n диаметра λ_q и Λ_q — диаметр той из двух подобластей G_n, определяемых q, которая не содержит начала координат. Следуя Варшавскому, автор полагает $\eta_n(\delta) = \sup \Lambda_q$, где верхняя грань берется по всем q, для которых $\lambda_q \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

Тогда, если G_0 ограничена и граница ее содержит только достижимые точки, то для равномерной сходимости f_n к f_0 в $|z|<1$ необходимо и достаточно выполнение условий: а) $\{G_n\}$ сходится к G_0 (как к ядру, относительно 0) и б) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \eta_n(\delta) = \eta(\delta) \to 0$, при $\delta \to 0$ (теорема 2).

2. Если G_0 ограничена, то для того чтобы для каждой точки $w_0 \in G_0$ (соответственно для каждого простого конца E области G_0) существовала последовательность $\{w_n\}$, $w_n \in G_n \cap G_0$, $w_n \to w_0$ (соответственно $w_n \to E$), для которой будет: $f_n^{-1}(w_n) \to f_0^{-1}(w_0)$ (соответственно $f_n^{-1}(w_n) \to f_0^{-1}(E)$) (непрерывная сходимость в $\overline{G}_0$ «в обобщенном смысле»), необходимо и достаточно выполнение условий: а) (см. выше) и в) Для всяких двух последовательностей точек $\{w_n'\}$, $\{w_n''\}$, $w_n', w_n'' \in G_0 \cap G_n$, сходящихся к простому концу E области G_0, точки w_n', w_n'' можно отделить от 0 в G_n сечением диаметра ε_n, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ (теорема 12). Библ. 42 назв.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестна работа референта (РЖМат, 1954, 1627; см. также перевод этой работы, реф. 3941), результаты которой позволяют автоматически решать большинство вопросов, поставленных автором. Так теоремы 2, 4, 5, 7, 11, 12—14 реферируемой работы легко выводятся из результатов референта в эквивалентных или в тех же (теоремы 13, 14) формулировках. Например, условие б), приведенное выше, эквивалентно следующему: всякий «простой конец последовательности $\{G_n\}$» содержит единственную точку, а условие в) эквивалентно требованию: всякая последовательность точек $\{w_n\}$, $w_n \in G_0 \cap G_n$, сходящаяся к простому концу ядра G_0, должна сходиться «к соответствующему простому концу последовательности $\{G_n\}$». Г. Д. Суворов

3943. Метрическая теорема о конформном отображении. Цудзи (A metrical theorem on conformal mapping. Tsuji Masatsugu), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 4, № 2, 111—112 (англ.)

Дается простое доказательство теоремы: Пусть D — ограниченная область плоскости w с границей Γ и $E \subset \Gamma$ — замкнутое множество, состоящее из достижимых граничных точек, логарифмическая емкость которого равна 0. Тогда, если отобразить универ-

сальную поверхность наложения D конформно на $|z|<1$, то E переходит во множество E^* типа $F_{\sigma\delta}$ меры нуль на $|z|=1$.

Как отмечает сам автор, приведенная теорема легко вытекает из теоремы, доказанной Оцука (Ohtsuka M., Nagoya Math. J., 1951, 3, 91—137).

Г. Ц. Тумаркин

3944. О порядке равностепенной непрерывности одного класса однолистных отображений в замкнутых областях. Суворов Г. Д., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 1, 22—23

Пусть D — плоская односвязная ограниченная область, содержащая точку $z=0$. Если за расстояние между точками области принять число $\rho(z_1, z_2; D) = \inf_{z\in D}[\bar\rho(z_1, z)+\bar\rho(z, z_2)]$, где $\bar\rho(z, z') = \min[\rho_1(z, z'), \rho_2(z, z')]$, $\rho_1(z, z')$ — нижняя грань длин линий, лежащих в D и соединяющих точки z и z', $\rho_2(z, z')$ — нижняя грань длин линий, разбивающих D на две подобласти, так что z и z' принадлежат той из подобластей D, которая не содержит точки $z=0$, то замыкание области $\bar D$ в этой метрике будет, как доказано, ранее автором (РЖМат, 1957, 1318), полным метрическим пространством.

Приводится без доказательства следующий результат. Пусть область D содержит круг $|z|<\delta\leqslant 1$. Если гомеоморфное отображение $w=T(z), T(0)=0$ области D на ограниченную область Δ удовлетворяет достаточно широким ограничениям, то имеет место оценка

$$\rho[T(z_1), T(z_2); \Delta] < A(k, \delta)\left[\ln\frac{\delta\sqrt{3}}{2\rho(z_1, z_2; D)}\right]^{-1/2},$$

где $A(k, \delta)$ — постоянная, зависящая только от $T(z)$ и δ, z_1, $z_2\in\bar D$.

Эта оценка является обобщением оценки, полученной М. А. Лаврентьевым для однолистных конформных отображений круга на ограниченные области (Докл. АН СССР, 1936, 4, 207). А. В. Батырев

3945. Методы и результаты теории однолистных функций. Куфарев П. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 29—31

3946. Однолистность непрерывных дробей и интегралов Стилтьеса. Тейл (Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms. Thale James S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 232—244 (англ.)

Пусть $\mu(t)$ — неубывающая и ограниченная вещественная функция на сегменте $[0,1]$ (или $[-1,1]$). Доказывается, что аналитические функции, определенные интегралами Стилтьеса, будут однолистными

$$F(z)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1+zt}\quad\text{для } \operatorname{Re} z\geqslant -1,\ z\neq -1,$$

$$F(z)=\int_0^1\frac{z}{1+zt}\,d\mu(t)\quad\text{для } \operatorname{Re} z\geqslant -1,\ z\neq -1,$$

$$F(z)=\int_{-1}^1\frac{d\mu(t)}{z-t}\quad\text{для } |z|>1.$$

Границу однолистности нельзя улучшить. Следует заметить, что эти функции тесно связаны с функциями, выпуклыми по направлению мнимой оси (Robertson M. S., Ann. Math., 1936, 37, № 2, 374—408), и с их обобщениями.

Далее доказывается ряд теорем об однолистности аналитических функций, заданных непрерывными дробями.

Теорема 3.1. Если $g_0, g_1, \ldots$ — вещественные числа, $0\leqslant g_p\leqslant 1$, $p=0, 1, 2, \ldots$ то функция

$$G(z)=\frac{1}{1}+\frac{(1-g_0)g_1z}{1}+\frac{(1-g_1)g_2z}{1}+\cdots$$

однолистна для $\operatorname{Re} z\geqslant -1$, $z\neq -1$. Граница однолистности не может быть улучшена.

Теорема 4.1. Если $a_1, a_2, \ldots$ — комплексные числа, удовлетворяющие неравенствам $|a_p|\leqslant\frac{1}{4}$, $p=1, 2, \ldots$, то функция

$$F(z)=\frac{1}{1}+\frac{a_1z}{1}+\frac{a_2z}{1}+\cdots$$

однолистна в круге $|z|<\dfrac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$

Теорема 4.4. Если a_p и b_p — комплексные числа,

$$|a_p|<\frac{N}{3},\ |b_p|<\frac{M}{3},\ p=1, 2, \ldots,$$

то функция

$$F(z)=\frac{1}{z+b_1}-\frac{a_1^2}{z+b_2}-\frac{a_3^2}{z+b_3}-\cdots$$

однолистна для $|z|>N\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{M}{3}$.

В заключение автор находит радиус круга звездности для рассмотренных им однолистных функций.

С. А. Касьянюк

3947. Об однолистности комплексного потенциала, I. Реньи, Реньи (A komplex potenciál egyértüségéröl, I. Rényi Alfred, Rényi Kató), Magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl. 1954 (1955), **3**, № 3—4, 353—367 (венг.; рез. русс., нем.)

Течение в области T типа полуплоскости именуется истинным, если расход между любой конечной точкой границы и любой внутренней точкой может быть определен и обладает отличным от нуля конечным значением. Для области типа полосы дополнительно требуется, чтобы был отличен от нуля и расход между обоими берегами. Предполагается, что все граничные точки рассматриваемых областей достижимы. Доказываются теоремы:

1. Пусть T — область типа полуплоскости и $w=f(z)$ — комплексный потенциал некоторого течения, происходящего в T. Для того, чтобы функция $f(z)$ отображала область T однолистно на верхнюю (или нижнюю) полуплоскость плоскости w, необходимо и достаточно, чтобы течение было истинным в T.

2. Потенциал $w=f(z)=\varphi+i\psi$ течения, происходящего в области T типа полосы, тогда и только тогда отображает однолистно область T на полосу $0<\psi<a$ плоскости w, если течение истинное в T и его расход равен a. М. Т. Нужин

3948. К теории однолистных функций. Умэдзава (On the theory of univalent functions. Umezawa Toshio), Tohoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 212—228 (англ.)

Устанавливается ряд достаточных признаков однолистности и p-листности отображений, реализуемых аналитическими функциями комплексного переменного. Наиболее общие из них составляют:

Теорема 1. Если $f(z)$ регулярна в замкнутой области D, ограниченной простой замкнутой правильной кривой Γ, на которой $f'(z)\neq 0$ и z_i, z_j, $i, j = 1, 2, \ldots$ — корни уравнения $d\arg df(z)=0$ на Γ, то для однолистности $f(z)$ в D достаточно выполнения одного из условий:

1) $\max\limits_{i,j}\int_{z_j}^{z_i} d\arg df(z) < 3\pi$, $z\in\Gamma$;

2) $\int_\Gamma d\arg df(z)=2\pi$, $\min\limits_{i,j}\int_{z_j}^{z_i} d\arg df(z) > -\pi$.

Теорема 2. Если $f(z)$ регулярна и $f'(z)\neq 0$ в замкнутой выпуклой области D, ограниченной правильной кривой L, z_i, $i=1, 2, \ldots,$ — корни уравнения

$$\frac{d\arg df(z)}{d\arg dz}=0,\ z\in L \text{ и } \operatorname{Re} e^{i\alpha}f'(z_i)>0,\ i=1, 2, \ldots$$

(α — действительное постоянное число), то $f(z)$ однолистна в D.

Теорема 5. Если $f(z)$ регулярна, кроме одного простого полюса, в односвязной замкнутой области D, ограниченной правильной кривой Γ, на которой $f'(z)\neq 0$, и если

$$d\arg df(z)<0,\ z\in\Gamma,\ \int_\Gamma d\arg df(z)=-2\pi,$$

то $f(z)$ однолистна в D.

Теорема 11. Если $f(z)$ однозначна и регулярна в замкнутой выпуклой области D, имеющей $(n-1)$ круговых вырезов $|z-a_i|<r_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, и если $0<1+\operatorname{Re}\dfrac{(z-a_i)f''(z)}{f'(z)}<2$ на $|z-a_i|=r_i$ и $\operatorname{Re} e^{i\alpha}f'(z)>0$, $z\in D$, то $f(z)$ однолистна в D.

Теорема 13. Пусть $f(z)$ регулярна в замкнутой выпуклой области D, ограниченной правильной кривой L, имеет в D в точности $p-1$ критических точек a_i, $i=1, 2, \ldots, p-1$ (с учетом их кратности) и не имеет критических точек на L. Тогда, если

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}f'(z)\Big/\prod_{i=1}^{p-1}(z-a_i)\right]>0$$

на L (α — действительное число), то $f(z)$ не более чем p-листна в D.

Теорема 16. Если $f(z)$ регулярна в односвязной замкнутой области D, ограниченной правильной кривой Γ, на которой $f'(z)\neq 0$, и если $\int_\Gamma d\arg df(z)=2k\pi$, то для того чтобы $f(z)$ была не более чем p-листной в D, достаточно выполнения одного из условий

1) $\int_{C_1} d\arg df(z) < (p+k+1)\pi$,

2) $\int_{C_2} d\arg df(z) > -(p-k+1)\pi$,

3) $\int_\Gamma |d\arg df(z)| < 2(p+1)\pi$,

где $p\geqslant k$ — постоянное целое число, C_1 и C_2 — части Γ, на которых соответственно

$$d\arg df(z)>0,\ d\arg df(z)\leqslant 0.$$

Кроме того, доказывается

Теорема 15. Если $f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots$ регулярна в круге

$$|z|\leqslant 1 \text{ и } \left|\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right|<M,$$

то она p-листна в круге $|z|<\dfrac{1}{M}$ и отображает круг

$$|z|<M_2-\sqrt{M_2^2-1},\ M_2=\frac{1}{2}\left\{M\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}$$

на p-листную выпуклую область.

Установленные признаки однолистности обобщают полученные ранее признак Одзаки (Ozaki S., Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, 1941, 4, 45—86) и признак Носиро-Вольфа (Wolff J., C. r. Acad. sci., 1934, 198, 1209—1210).

Доказательства проводятся на основании лемм, установленных автором с использованием теоремы Морса—Хейнса (Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, Изд-во ин. лит., 1951).

Теорема 15 обобщает аналогичную теорему Носиро для случая $p=1$ (Noshiro K., Proc. Akad. Tokyo, 1932, 8, 275—277). Г. В. Корицкий

3949. О коэффициентах некоторых однолистных функций. Р и д (On the coefficients of certain univalent functions. R e a d e M a x w e l l. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A—I, № 215, 6 pp.) (англ.)

Рассматриваются оценки коэффициентов разложения в ряд Тейлора аналитических функций $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, удовлетворяющих условиям: для класса A: $a_1=1$, $f'(z)\neq 0$ при $|z|<1$ и

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\frac{\pi}{2},\ z=re^{i\theta}$$

при всех $\theta_1<\theta_2$ и $0\leqslant r<1$; для класса B: $a_1\neq 0$, $f(z)\neq 0$ при $|z|<1$ и

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}d\theta>-\frac{\pi}{2},\ z=re^{i\theta},$$

при всех $\theta_1<\theta_2$ и $0\leqslant r<1$.

Получены точные границы коэффициентов для класса A в виде

$$|a_n|\leqslant\frac{n+1}{2},$$

для класса B

$$|a_n|\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$$

и указаны функции, реализующие эти оценки.

Доказывается, что функции класса A однолистны и для них имеют место следующие неравенства:

$$\frac{(1-|z|)^{1/2}}{(1+|z|)^{5/2}}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{(1+|z|)^{1/2}}{(1-|z|)^{5/2}};$$

$$|f''(z)|\leqslant 6(2+|z|)\frac{(1+|z|)^{5/2}}{(1-|z|)^{3/2}}$$

Примечание референта. Класс A является подклассом класса $C_\varepsilon(p)$ при $\varepsilon=\dfrac{\pi}{2}$ и $p=1$, а B под-

классом класса $S_\varepsilon(p)$ при $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$ и $p=1$, изученных Ю. Д. Максимовым (РЖМат, 1956, 4443, 6529).

С. А. Касьянюк

3950. Заметка о выпуклых отображениях. Хеймо (A note on convex mappings. Haimo Deborah Tepper), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 423—428 (англ.)

Теорема. Пусть $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\ldots$ — функция, регулярная в $0<|z|<1$. Пусть

$$|\{f(z),\ z\}|\leqslant 2q(|z|), \qquad (1)$$

где: а) функция $q(x)$ непрерывна и положительна в $0\leqslant x<1$; б) дифференциальное уравнение

$$y''(x)+q(x)\,y(x)=0$$

имеет не исчезающее решение в $0<x<1$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=0,\ \lim_{x\to 1}\frac{xy'(x)}{y(x)}\geqslant\frac{1}{2}.$$

(При указанных предположениях предел всегда существует). Тогда функция $f(z)$ отображает круг $|z|<1$ на дополнение к выпуклой области. Этот результат не улучшаем в том смысле, что всегда, когда $q(z)$ — регулярная функция в $|z|<1$ такая, что $|q(z)|\leqslant q(|z|)$, то постоянная 2 в (1) наибольшая из возможных.

Доказательство частично опирается на метод Нехари (РЖМат, 1955, 5744). Н. А. Лебедев

3951. Замечание к моей предыдущей работе «Об обобщении теоремы Лёвнера». Цудзи (Remark on my former paper «On an extension of Löwner's theorem». Tsuji Masatsugu), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 4, № 2, 109—110 (англ.)

Пусть $w=f(z)$ — регулярная и ограниченная в круге $|z|<1$ функция. Через $f(e^{i\vartheta})$ обозначаются граничные значения $f(z)$: $f(e^{i\vartheta})=\lim\limits_{r\to 1}f(re^{i\vartheta})$ (по теореме Фату этот предел существует почти всюду на $|z|=1$). Доказывается следующая теорема: Пусть $f(z)$ регулярна в $|z|<1$, причем $|f(z)|<1$ при $|z|<1$ и $f(0)=0$. Пусть далее E_0 — множество точек $e^{i\vartheta}$ таких, что $|f(e^{i\vartheta})|=1$, тогда E_0 — борелевское множество, причем если $E\subset E_0$ — какое-либо борелевское подмножество E_0, а E^* — его образ на $|w|=1$, то E^* будет аналитическим множеством, поэтому измеримым, и будет иметь место неравенство $mE\leqslant mE^*$. Если к тому же $0<mE_0<2\pi$, $mE>0$, то $mE<mE^*$.

Теорема Лёвнера соответствует случаю, когда E есть дуга на $|z|=1$. Впоследствии эта теорема обобщалась рядом авторов. В предыдущей работе автора (Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, 18) предполагалось, что $E=E_0$, однако общий случай получается без какой-либо модификации доказательства. Как отмечает сам автор подобный же результат был получен Оцука (Ohtsuka M., Nagoya Math. J., 1951, 3, 91—137). Г. Ц. Тумаркин

3952. О функциях, аналитических в полуплоскости. Уотерман (On functions analytic in a half-plane. Waterman Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 1, 167—194 (англ.)

Для функций, аналитических в полуплоскости, устанавливаются две теоремы, аналогичные теоремам Литлвуда и Пейли (Littlewood J. E., Paley R. E. A. C., Proc. London Math. Soc., 1937, 42, 52—89) для функций, аналитических в круге. Рассматривается класс K_p функций $\varphi(\sigma+i\tau)$, аналитических в полуплоскости $\sigma>0$ и таких, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\sigma+i\tau)|^p\,d\tau \qquad (p\geqslant 1)$$

равномерно ограничен относительно всех $\sigma>0$. Класс K_p был введен Хиллом и Тамаркиным (Hille E., Tamarkin J. D., Fundam. math., 1935, 25, 329—352), этот класс изучался также В. И. Крыловым (Матем. сб., 1938, 4, (46), 9—30).

Теорема 1. Если $\varphi(\sigma+i\tau)\in K_p$ $(p\geqslant 1)$, то функция

$$g(\tau;\ \varphi)=\left\{\int_0^\infty\sigma\,|\varphi'(\sigma+i\tau)|^2\,d\sigma\right\}^{1/2}$$

принадлежит классу L_p и существует константа A_p, зависящая только от p, такая, что

$$\|g(\tau;\ \varphi)\|_{L_p}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(\tau;\ \varphi)|^p\,d\tau\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant A_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(i\tau)|^p\,d\tau\right)^{1/p}=A_p\,\|\varphi\|_{L_p},$$

здесь $\varphi(i\tau)$ — угловые граничные значения $\varphi(z)$. Наоборот, если функция $\varphi(\sigma+i\tau)$ аналитична в полуплоскости $\sigma>0$ и при $\sigma+i\tau\to\infty$, $\varphi(\sigma+i\tau)$ стремится к нулю равномерно в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\varepsilon>0$, то из принадлежности $g(\tau;\ \varphi)$ к классу L_p, $p>1$, следует, что $\varphi(\sigma+i\tau)\in K_p$ и при некоторой константе A_p

$$\|\varphi\|_{L_p}\leqslant A_p\,\|g(\tau;\ \varphi)\|_{L_p}.$$

Вторая теорема формулируется аналогично теореме 1 с заменой функции $g(\tau,\ \varphi)$ на

$$g^*(\tau,\ \varphi)=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\sigma\,d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi'(\sigma+i\beta)|^2\,P(\sigma,\tau-\beta)\,d\beta\right)^{1/2},$$

где $P(\sigma,\ \tau)=\sigma/(\sigma^2+\tau^2)$ — ядро Пуассона. Здесь уже как и в первой части теоремы $p>1$.

Для функций $\varphi(\sigma+i\tau)$ класса K_p устанавливается еще одно предложение того же типа, аналогичное результату Зигмунда и Марцинкевича (Marcinkiewicz J., Zygmund A., Duke Math. J., 1938, 4, 473—485) А. Ф. Тиман

3953. О первой граничной задаче для функций, гармоничных в единичном круге. Лехто (On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit circle. Lehto Olli), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. A1, № 210, 26 (англ.)

Согласно теореме Багемила и Зейделя (РЖМат, 1955, 5737) для всякой измеримой функции $\Psi(\vartheta)$, $0\leqslant\vartheta<2\pi$, существует гармоническая в $|z|<1$ функция $u(z)$ с $\lim\limits_{r\to 1}u(re^{i\vartheta})=\Psi(\vartheta)$. Конструкция $u(z)$ с помощью интеграла Пуассона годится вообще лишь для функции $\Psi(\vartheta)\in L_1$; в реферируемой статье автор, обобщая идею Локки (РЖМат, 1956, 7270), указывает конструктивный метод получения $u(z)$ для произвольной измеримой конечной почти всюду $\Psi(\vartheta)$. Решение получается в виде

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{F(z)\int_0^{2\pi}\frac{\Psi(\vartheta)}{F(e^{i\vartheta})}\,\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta\right\},$$

где $F(z)$ голоморфна в $|z|<1$ и удовлетворяет условиям: 1) $\Psi(\vartheta)/F(e^{i\vartheta})\in L_1$; 2) почти всюду $|\operatorname{Re}F(e^{i\vartheta})|<\infty$,

$\operatorname{Im} F(e^{i\vartheta}) = 0$; $F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1} F(re^{i\vartheta})$. Замечая, что достаточно построить $F(e)$ такую, что $F(e^{i\vartheta}) > |\Psi(\vartheta)|$ с соблюдением условий 2), автор сводит эту проблему к двум: а) нахождению функции $W(z)$ ограниченного вида, для которой почти всюду $\operatorname{Im} W(e^{i\vartheta}) = 0$, $W(e^{i\vartheta}) \geqslant \beta(\vartheta)$, $\beta(\vartheta)$ — наперед заданная неотрицательная функция класса L_1; б) нахождению целой функции $w(\zeta)$, $\zeta = s + it$, причем для $s \geqslant 0$ $w(s)$ действительна и $w(s) \geqslant \rho(s)$, где $\rho(s)$ неотрицательная и не убывает.

Используя общий результат, в § 4 автор строит $u(z)$ для конкретных $\Psi(\vartheta)$; затем приводится пример гармонической $u(z)$ такой, что $\lim_{r\to 1} u(re^{i\vartheta}) = 0$ для $\vartheta \neq \vartheta_0$ и вдоль луча $\arg z = \vartheta_0$ $u(z)$ имеет заданный порядок роста.

В § 5 решается граничная задача для случая, когда $\Psi(\vartheta)$ бесконечна на произвольном открытом множестве.

Примечание референта. В работе имеются опечатки. Замечание автора на стр. 14 о том, что $W(\vartheta) = \lim_{r\to 1} W(re^{i\vartheta})/\Pi(re^{i\vartheta})$, референту непонятно; соотношение же $W(e^{i\vartheta}) = W(\vartheta) < \infty$ следует хотя бы из формулировки теоремы Хинчина—Островского, приведенной в монографии Привалова «Граничные свойства аналитических функций» (изд. 2-е, М., 1950, стр. 118). И. Н. Песин

Примечание редакции. Существование гармонической в круге $|z| < 1$ функции $u(z)$, граничные значения которой $u(e^{i\vartheta})$ совпадают почти всюду на $|z| = 1$ с произвольной измеримой и конечной почти всюду функцией $\Psi(\vartheta)$, было установлено Н. Н. Лузиным в его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд», впервые опубликованной в 1915 г. Искомая функция $u(z)$ была получена Н. Н. Лузиным в виде

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta,$$

где $F(\vartheta)$ примитивная для функции $\Psi(\vartheta)$ (Лузин Н. Н. Собр. соч., т. I, М., 1953, стр. 76).

3954. Построения «положительных действительных функций». Долежал (Konstrukce «positivně reálných funkcí». Doležal Václav), Apl. mat., 1956, 1 № 3, 200—215 (чеш.; рез. русс., англ.)

В теории линейных динамических систем весьма важной является задача нахождения передаточной функции системы $z(\lambda)$ (в силу свойств этой функции, автор называет ее «положительной действительной функцией»), по значениям ее действительной части $u(\omega)$ на мнимой оси ($\lambda = \tau + i\omega$).

В первой части работы дается способ построения функции $z(\lambda)$ с помощью конформного отображения полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ на единичный круг и последующего применения интеграла Шварца. Если функция $u(\omega)$ рациональна, то функция $z(\lambda)$ также рациональна и может быть найдена в конечном виде с помощью теории вычетов.

По условиям физической осуществимости рассматриваемой линейной системы функция $z(\lambda)$ должна быть рациональной. Функция $u(\omega)$ выбирается в зависимости от тех или иных требований, предъявляемых к линейной системе, и вообще не является рациональной. Поэтому возникает задача равномерной аппроксимации функции $u(\omega)$ с помощью рациональных.

Во второй части работы указаны три способа аппроксимации функции $u(\omega)$ с помощью рациональных и приведены известные оценки степени приближения. Способ построения аппроксимирующей рациональной функции основывается на отображении полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ на круг.

В добавлении к статье доказана теорема Шура о степенных рядах с положительными действительными частями и ряд лемм. А. В. Батырев

3955. Приложение конформного отображения к решению некоторых краевых задач. Авдеев Н. Я. Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 71—88

Рассматриваются элементарные примеры применения конформного отображения к решению первой краевой задачи с кусочно-постоянными граничными значениями для некоторых специальных областей (координатный угол, круговой сегмент, луночка, полоса и др.). М. Т. Нужин

3956. Об одном изменении краевого условия плоской задачи теории упругости. Натанзон В. Я. Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 27—29
См. РЖМех, 1955, 3855.

3957. Соотношение между максимумом и минимумом модуля на одном классе целых функций. Челнберг (A relation between the maximum and minimum modulus of a class of entire functions. Kjellberg) 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund 1954, 135—138 (англ.)

Рассматривается класс целых функций $f(z)$, представимых в виде произведения

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_n}\right),$$

где $r_n > 0$, и имеющих конечный порядок

$$\rho = \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} < 1,$$

где $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$. Доказано, что если при некотором положительном $\lambda < \rho$,

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^{\lambda}} < \infty$$

то

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln m(r)}{\ln M(r)} \geqslant \cos\pi\lambda, \quad \text{где} \quad m(r) = \min_{|z|=r}|f(z)|.$$

Если к тому же $0 < \lambda < 1/2$, то для любого $\varepsilon > 0$ бесконечного множества значений $r \to \infty$

$$\ln m(r) > \cos\pi\lambda\ \ln M(r) > r^{\rho-\varepsilon}.$$

Полученный результат имеет отношение к диссертации автора и связан с одним вопросом Хейман (Hayman W., Proc. London Math. Soc., 1952, (3) 2 469—512). При доказательстве используется метод, применявшийся ранее Данжуа (Denjoy A., C. r. Acad. sci., Paris, 1930, 193, 228—230). А. Ф. Тима

3958. Заметка о рядах Дирихле (XV), о методе суммирования Валирона и направлениях Бореля. Танака (Note on Dirichlet series (XV) on G. Valiron's method of summation, and Borel's directions Tanaka Chuji), Yokohama Math. J., 1954, 1 № 2, 151—164 (англ.)

При более общих условиях, чем это было раньше, изучаются направления Бореля целых функций, определенных рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_1^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}\ (s = \sigma + it, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty).$$

Используется метод Валирона (Valiron G., Proc. Nat. Acad. U. S. A., 1934, **20**, 211—215), развитый позднее (Yu Chia-Yung, Ann. scient. École norm. supér, 1951 68, 65—104). Этот метод состоит в том, что с рядом

(1) ассоциируется некоторый ряд Дирихле с конечной абсциссой сходимости, обладающий тем свойством, что каждой вершине горизонтальной звезды суммы второго ряда соответствует направление Бореля функции $F(s)$. Указанными авторами было показано, что если $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty$ и функция (1) имеет порядок $\rho>0$, причем

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\ln M(\sigma),\quad M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|F(\sigma+it)|,$$

то существует положительная неубывающая функция $w(x)$ со свойствами: $\int^{+\infty}\frac{w(x-h)}{w(x)}dx<\infty$ для $h>0$, ряд

$$f(s)=\sum_1^\infty a_n\Omega(\lambda_n)e^{\lambda_n s},$$

где $\Omega(u)=\int_1^\infty\frac{e^{ux}}{w(x)}dx$, имеет конечную абсциссу равномерной сходимости и

$$f(s)=\int_1^\infty\frac{F(x+s)}{w(x)}dx,\quad \mathrm{Re}(s)<0. \qquad (2)$$

На основе этого результата было установлено, что если $s_0=\sigma_0+it_0$ — вершина горизонтальной звезды функции $f(s)$, то в полосе $|t-t_0|<\frac{\pi}{2\rho}$ имеется направление Бореля $\mathrm{Im}(s)=t_1$, обладающее свойством: существует последовательность кругов $\Gamma_n: s-s_n=o(1)$ ($s_n=\sigma_n+it_1$, $\sigma_n\to+\infty$) такая, что в Γ_n функция $F(s)$ принимает по меньшей мере

$$\exp[\sigma_n(\rho+\varepsilon_n)],\quad \varepsilon_n=\varepsilon_n(z)=o(1),$$

раз каждое значение z, для которого $\ln|z|<\exp[\sigma_n(\rho-o(1))]$, $\ln|z-z_n|>-\exp[\sigma_n(\rho-o(1))]$, где z_n стремятся к пределу при $n\to\infty$.

В заметке указанные результаты устанавливаются без требования $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty$, а только в предположении, что ряд (1) сходится равномерно внутри всей плоскости (т. е. в любой полуплоскости $\mathrm{Re}(s)\leqslant\alpha$). Показывается, кроме того, что если $s_0=\sigma_0+it_0$ — вершина горизонтальной звезды функции $f(s)$, то $\mathrm{Im}(s)=t_0$ есть направление наибольшего роста:

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\ln M(\sigma,\varepsilon),\qquad M(\sigma,\varepsilon)=\max_{|t-t_0|\leqslant\varepsilon}|F(\sigma+it)|$$

где $\varepsilon>0$ — любое. А. Ф. Леонтьев

3959. Об интерполировании функций ограниченного вида. Нафталевич А. Г., Mokslo darbai. Vilniaus valst. univ. Mat., fiz. ir. chem. moksluser., Уч. зап. Вильнюсск. ун-та, сер. матем., физ. и хим. н., 1956, 5, 5—27

Пусть $R_k(z)=\sum_{j=1}^n a_{k,j}(z-\lambda_k)^{-j}$, $k=1,2,\ldots$, $|\lambda_k|<1$, $\lim_{k\to\infty}|\lambda k|=1$, — заданная последовательность рациональных функций. В работе рассматривается вопрос об условиях, которые надо наложить на рост модулей $|a_{k,j}|$, $k=1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots,n$, и на расположение точек λ_k, чтобы существовала мероморфная функция $f(z)$ ограниченного вида в $|z|<1$ с полюсами в точках λ_k и только в них, с соответствующими главными частями $R_k(z)$. Часть результатов без доказательства была опубликована ранее (РЖМат, 1953, 200). В § 1 приводятся в виде лемм вспомогательные результаты о гармонических функциях и функциях ограниченного вида, используемые в дальнейшем.

Так, в лемме 1 устанавливается связь между порядком роста гармонической в круге $|z|<1$ функции $u(z)$, представимой интегралом Пуассона—Стилтьеса, с функцией $\varphi(\theta)$ при приближении z к точке $e^{i\alpha_0}$ и поведением $\varphi(\theta)$ при $\theta\to\alpha_0$. В лемме 2 дается связь между ростом характеристики $T(r,f)=\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ регулярной в единичном круге функции и ростом функции $f(z)$ на последовательности точек $\{\lambda_k\}$.

Опираясь на эти леммы, автор доказывает теорему 1, сформулированную в цитированном выше реферате (теорема 6). В теореме 2 автор отказывается от фигурировавшего в теореме 1 условия, что все точки $\{\lambda_k\}$ лежат в конечном числе не касательных к $|z|=1$ углов, и показывает, что, усиливая тогда ограничения на рост $a_{k,j}$, можно и в этом случае строить требуемые функции. При этом в теореме 2 рассмотрен лишь случай, когда все $R_k(z)=\frac{A_k}{z-\lambda_k}$. Полученное из теоремы 2 следствие 2 позволяет, в частности, сделать вывод, что если

$$\sum_{k=1}^\infty(1-r_k)<\infty,\ \text{а}\ \sum_{k=1}^\infty(1-r_k)\ln\frac{1}{1-r_k}=\infty,$$

то можно построить произведение Бляшке с нулями в точках λ_k, $|\lambda_k|=r_k$, производная которого будет функцией с неограниченной характеристикой.

Заметим, что впервые существование произведений Бляшке с подобными свойствами было доказано Фростманом (Frostman O., Kgl. fysiogr. sällskap. i Lund förhandl., 1942, 12, № 15, 169—182), что не отмечено в работе. В теореме 3 указываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы для любой таблицы чисел $a_{k,0}, a_{k,1},\ldots,a_{k,n-1}$, $k=1,2,\ldots$, удовлетворяющих условию $\overline{\lim}_{k\to\infty}(1-|\lambda_k|)\ln^+|a_{k,j}|<\infty$, $j=1,2,\ldots,n-1$, существовала регулярная ограниченного вида функция $g(z)$, разложение которой в окрестности каждой из точек λ_k имеет в качестве начальных коэффициентов числа $a_{k,0},\ldots,a_{k,n-1}$. Г. Ц. Тумаркин

3960. Об одном классе римановых поверхностей. Виттих (Über eine Klasse Riemannscher Flächen. Wittich H.), Comment. math. helv., 1956, 30, № 2, 116—123 (нем.)

Рассматривается класс римановых поверхностей, разветвленных только над точками $w=0$, 1, ∞, причем единственная логарифмическая точка ветвления лежит над $w=\infty$, остальные лежащие над 0, 1, ∞ алгебраические точки ветвления поверхности симметричны относительно прямой $\mathrm{Im}\,w=0$, $-\infty<\mathrm{Re}\,w<0$, проведенной на одном из листов. Показано, что поверхности указанного класса имеют параболический тип, и даны оценки, позволяющие делать достаточно точные высказывания о распределении значений мероморфных в $|z|<\infty$ функций $w=w(z)$, отображающих $|z|<\infty$ на рассматриваемые поверхности. В частности, показано, что в зависимости от кратности алгебраических точек ветвления порядок λ функций $w=w(z)$ может изменяться в пределах $\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\infty$.

Этот класс поверхностей изучался автором раньше в основном тем же методом (Math. Ann., 1950, 122, 37—46), но в настоящей статье имеются некоторые

усовершенствования доказательств (использование метода экстремальных длин и др.). А. А. Гольдберг

3961. О построении полных систем функций двух комплексных переменных. Еремин С. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 214—217

Систему функций $\{f_k(z_1, z_2)\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ двух комплексных переменных z_1, z_2 автор называет полной в однолистной односвязной области наложения D, если все функции $f_k(z_1, z_2)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ являются аналитическими в области D и если каждая аналитическая в области D функция $f(z_1, z_2)$ может быть представлена во всякой области D_0, лежащей строго внутри D, как предел равномерно сходящейся последовательности линейных комбинаций вида

$$\sum_{j=0}^{N} c_j f_j(z_1, z_2),$$

где N и c_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные числа. Референтом было показано (РЖМат, 1956, 5835), что всякую аналитическую в точке (0, 0) функцию

$$\Phi(z_1, z_2)=\sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n \qquad (1)$$

можно представить в виде:

$$\Phi(z_1, z_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z_1+z_2 e^{it}, z_2+z_1 e^{-it})\, dt,$$

где

$$\varphi(u, v)=\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} a_{mn} u^m v^n, \qquad (2)$$

и что если ряд (2) абсолютно сходится в бицилиндре $\{|u|<R, |v|<R\}$, то ряд (1) абсолютно сходится в гиперконусе $|z_1|+|z_2|<R$, и обратно. Называя $\Phi(z_1, z_2)$ функцией, определяемой $\varphi(u, v)$, автор доказывает теорему:

Пусть $\Phi_{k_1}(z_1, z_2)$ — функция, определяемая функцией $\varphi_{k_1}(u, v)$ и $k=0, 1, 2, \ldots$ Тогда система $\{\Phi_{k_1}(z_1, z_2)\}$ полна в гиперконусе $|z_1|+|z_2|<R$, когда система $\{\varphi_{k_1}(u, v)\}$ полна в бицилиндре $|u|<R$, $|v|<R$. С помощью системы $\{\Phi_{k_1}(z_1, z_2)\}$ автор далее строит другие системы, полные в соответствующих областях. Очевидно, система $\{\Phi_{k_1}(z_1, z_2)\}$ полна в бицилиндре $|z|<\frac{R}{2}$, $|z_2|<\frac{R}{2}$. На основании приведенной теоремы система $\{\Phi_{k_1}(z_1, z_2)\}$ определяет систему $\{\Phi_{k_2}(z_1, z_2)\}$, полную в гиперконусе $|z_1|+|z_2|<\frac{R}{2}$. Продолжая так рассуждать, через p шагов приходим к системе $\{\Phi_{k_p}(z_1, z_2)\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, полной в гиперконусе $|z_1|+|z_2|<\frac{R}{2^{p-1}}$ и, следовательно, в бицилиндре $\left\{|z_1|<\frac{R}{2^p}, \ |z_2|<\frac{R}{2^p}\right\}$.

Попутно, автором устанавливается: если ряд $\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n$ сходится в бицилиндре $\{|z_1|<R, |z_2|<R\}$ $(R\neq\infty)$, то

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)^{p-1}|c_{k, n-k}|}\right\}=\infty.$$

А. А. Темляков

3962. Разложение аналитических функций на римановых поверхностях по алгебраическим или некоторым конечно-многозначным трансцендентным функциям Радойчич (Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flachen nach algebraischen oder gewissen endlich vieldeutigen transzendenten Funktionen. Radojčić M.), Publs Inst. math Acad. serbe sci., 1955, 8, 93—122 (нем.)

Если R — какая-либо риманова поверхность и $\{A_n\}$ — бесконечная последовательность замкнутых римановых поверхностей, так что каждая строго в R лежащая область принадлежит всем A_n для n достаточно больших, то последовательность $\{A_n\}$ «предельно содержит» R.

Если в некоторой последовательности римановых поверхностей каждая поверхность является поверхностью-основанием (Grundfläche) для следующей, то эта последовательность называется «последовательностью наложения».

Дается распространение теорем Миттаг—Леффлера и Вейерштрасса на незамкнутые римановы поверхности, допускающие предельно их содержащую последовательность наложения замкнутых римановых поверхностей; при этом рациональные функции Миттаг—Леффлера заменяются алгебраическими функциями и множители Вейерштрасса — некоторыми трансцендентными функциями, заданными на замкнутых римановых поверхностях.

В работе содержится также краткое изложение ранее опубликованных результатов автора (C. r. Acad. sci., 1927; Glas. Srp. Kr. Akad. Nauka, 1928, 130 Belgrade; Thise, Belgrade 1928; РЖМат, 1957, 379).

Е. Н. Аравийская

3963. Метрика на римановых поверхностях. Калаби (Metric Riemann surfaces. Calabi E.) Contributions to the theory of Riemann surfaces. Princeton, 1953, 77—85 (англ.)

Двумерная риманова поверхность $\mathfrak{M}$ вмещается с помощью системы голоморфных функций $x_\sigma=f_\sigma(z)$, где $\sigma=1, \ldots, N$; $N\leqslant+\infty$; $g(z, \bar{z})=\sum_{\sigma=1}^{N}\left|f'_\sigma(z)\right|^2\neq 0$ в унитарное пространство C^N. Здесь z — локально униформизирующий параметр на поверхности $\mathfrak{M}$. В результате на $\mathfrak{M}$ определяется метрика $ds^2=g(z, \bar{z})\,|dz|^2=\sum_{\sigma=1}^{N}|dx_\sigma|^2$. В работе устанавливаются общие свойства подобных метрик. Эти выводы составляют специальный случай предложений автора, относящихся к изометрическому вмещению келеровых многообразий (РЖМат, 1954, 5243) Б. А. Фукс

3964. О функциях, субгармонических в полупространстве. Хубер (On functions subharmonic in a half-space. Huber Alfred), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 147—159 (англ.)

Рассматриваются функции, субгармонические в полупространстве $H(x_n\geqslant 0)$ евклидова n-мерного пространства $(n\geqslant 2)$ и имеющие неположительный верхний предел при стремлении точки-аргумента к конечным точкам границы D области H. Метод, применяемый в работе, ведет свое начало от замечания, высказанного автору Вейнштейном: функция $u(x)\equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ будет гармонической (субгармонической) в полупространстве $x_n>0$ тогда и только тогда, когда функция

$$v(\xi)\equiv$$

$$\equiv u\left(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \sqrt{\xi_n^2+\xi_{n+1}^2+\xi_{n+2}^2}\right)\Big/\sqrt{\xi_n^2+\xi_{n+1}^2+\xi_{n+2}^2}$$

гармоническая (субгармоническая) в соответствующей области $(n+2)$-мерного пространства P_{n+2}. Это замечание (легко проверяемое a posteriori) вытекает из работ Вейнштейна (Weinstein A., Trans. Amer. Math.

Soc., 1948, **63**, 342—354) по теории осесимметрических потенциалов. В силу граничного условия особенности функции $v(\xi)$ стираются, так что последняя будет субгармонической во всем P_{n+2}.

Пусть $m(r)=\int_{S_r} u(x)\sin\varphi dS_1(x)$, где $r=\|x\|$, $\sin\varphi=x_n/r$, $S_r=H\cap E(\|x\|=r)$ и $dS_1(x)=dS_r(x)/r^{n-1}$. Автор устанавливает, что среднее значение $m(r)$ обладает следующими свойствами: 1) $m(r)/r$ и $r^{n-1}m(r)$ — выпуклые функции соответственно r^{-n} и r^n, 2) $m(r)/r$ и $m(r)$ — неубывающие функции r. Тот же метод позволяет получать, исходя из известных представлений функции $v(\xi)$ в P_{n+2}, представления $u(x)$ в H. Например, если $u(x)\leqslant 0$ в H, то

$$u(x)=cx_n-x_n\int_D|x-y|^{-n}\,d\nu_1(e_y)-\int_H g(x,y)\,d\nu_2(e_y),$$

где c — постоянная, $g(x,y)$ — функция Грина области H, $\nu_1(e)$ и $\nu_2(e)$ — неотрицательные меры Бореля соответственно с носителями D и H. Эти результаты являются обобщением ранее доказанных теорем (Dinghas A., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1938, 32—48; Math. Z., 1940, **46**, 559—570). Для субгармонических в H функций конечного порядка роста представления получаются из формул Брело (Brelot M., Ann. Inst. Fourier, 1949, **1**, 121—156). Применительно к регулярным аналитическим в полуплоскости функциям конечного порядка роста автор получает формулу разложения, которую можно рассматривать как аналог формулы разложения Адамара для целых функций.

В обозначениях и промежуточных формулах имеются неточности (в формулах, попавших в реферат, они исправлены). Е. Д. Соломенцев

3965 Д. **Приближение с помощью рациональных функций, которые имеют нули и полюсы в наперед заданных областях. Сновер** (Approximation by rational functions which have their zeros and poles in preassigned regions. Snover James Edward. — Doct. diss. Syracuse Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 12, 2539—2540 (англ.)

Автор сообщает (без доказательства) о результатах, полученных им относительно характера предельной функции последовательности рациональных функций, равномерно сходящейся в круге, при различных условиях, налагаемых на области расположения нулей и полюсов функций последовательности. Приводится также утверждение относительно сверхсходимости такой последовательности. Т. И. Краснощеков

См. также: 3878, 3910, 4149, 4190

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3966. **Решение дифференциального уравнения первого порядка. Бронский А. П.**, Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1956, **49**, 131—133

Для уравнения, полученного автором при решении механической задачи,

$$yy'+Ay^2=B,$$

где

$$A=\frac{(a^2+x^2)\ln U-a^2}{x(a^2+x^2)\ln U},$$

$$B=\frac{b^2-x^k\ln U}{x^{k+1}\ln U},\qquad U=[a^2+x^2]/x^2,$$

a, b, k — положительные постоянные, обычными методами приведения к линейному виду и вариации произвольного постоянного отыскиваются общее и частное решения, последнее при начальных условиях: $x=1$, $y=0$. И. П. Макаров

3967. **Об определении фундаментальной системы решений линейного дифференциального уравнения порядка n. Василаке** (Sur la détermination d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n. Vasilache S.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 172—182 (франц.)

Пусть $G(x,s)$ — решение уравнения

$$y^{(n)}=a_1(x)\,y^{(n-1)}+a_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)\,y\equiv\equiv L_x[y(x)],\qquad(1)$$

удовлетворяющее начальным условиям $G|_{x=s}=G'|_{x=s}=\ldots=G^{(n-2)}|_{x=s}=0$, $G^{(n-1)}|_{x=s}=1$ (производные по x). Такое решение нетрудно построить, имея фундаментальную систему решений. Обычно его используют для получения решения неоднородного уравнения, соответствующего (1). Автор показывает, что, зная $G(x,s)$, можно фундаментальную систему решений уравнения (1) получить по формуле

$$Y_i(x)=\frac{(x-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}+\int_{x_0}^{x}G(x,s)L_s\left[\frac{(s-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}\right]ds,$$

при $i=1,2,\ldots,n$. И. М. Соболь

3968. **О некоторых случаях существования периодических решений. Ворович И. И.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 165—168

Изучается бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\lambda^2\ddot{X}=\operatorname{grad}_{l_2}\Phi(X,\sin t,\cos t),\qquad(1)$$

где $\Phi(X,v,w)$ — слабо непрерывный и непрерывно дифференцируемый четный по каждому переменному функционал, определенный при $X\in l_2$, $|v|\leqslant 1$, $|w|\leqslant 1$. Предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i\partial\Phi/\partial x_i\leqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда все $x_i=0$. Утверждается, что при этих предположениях система (1) имеет на каждой сфере

$$\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\dot{x}_i^2\,dt=\rho^2$$

не менее счетного числа 2π-периодических решений, которые соответствуют различным $\lambda^2>0$ и ряд Фурье которых содержит только синусы. При этом имеется последовательность λ_n^2 таких, что $\lambda_n\to 0$.

Далее указаны различные условия, при которых существует по крайней мере одно периодическое решение у системы

$$\lambda^2\ddot{X} = \operatorname{grad}_{l_2}\Phi(X, \sin t, \cos t) + F(t), \qquad (2)$$

где $F(t)$ — периодическая функция.

Для фактического построения периодических решений уравнений (1) и (2) предлагается использовать прямые методы (метод Бубнова—Галеркина или метод Ритца). Утверждается, что при этом из приближенных решений можно выбрать последовательности, сходящиеся к точным решениям уравнений (1) или (2).

Полученные результаты новы даже для случая одного скалярного уравнения. Доказательства не приведены. М. А. Красносельский

3969. Решение задачи Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Камынин Л. И., Вестн. Моск. ун-та, 1956, № 6, 3—10

Доказывается существование и единственность решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial^m u(x,t)/\partial t^m = f(x,t; u(x+h_{-r},t), \ldots, u(x+h_r,t)),$$
$$-\infty < x < +\infty,\ |t| \leqslant T,$$

где x — переменный индекс, h_i, $i = -r, \ldots, r$ — постоянные, с начальными условиями

$$\partial^l u(x,0)/\partial t^l = \varphi_l(x) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$\varphi_l(x) \leqslant A_2 \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{m|x|}{H}\ln(1+|x|)\right\} \quad (H = \max|h_i|).$$

Приводится класс функций, где решение данной задачи единственное и класс функций, где единственность нарушается.

Доказывается далее, что решение системы

$$\frac{du_n(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(t)\, u_{n+k}(t)$$

с начальными условиями

$$u_n(0) = \varphi(n) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

всегда существует и единственно в классе функций

$$|u_n(t)| \leqslant A_1 \exp\{\varepsilon|n|\ln(1+|n|)\}.$$

Затем строится вид решения для системы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum c_\alpha(t)\, u(x+\alpha h, t)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$|\varphi(x)| \leqslant A_1 \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\ln(1+|x|)\right\} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Приводится класс функций, где это решение единственное и класс функций, где единственность может нарушаться. Библ. 8 назв. С. И. Горшин

3970. О единственности решения задачи Коши в классе быстро растущих функций для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Камынин Л. И., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 4, 545—548

Рассматривается система

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha(x,t)\, u(x+h_\alpha, t) +$$
$$+ f(x,t),\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad (1)$$

где $C_\alpha(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ определены для всех x и непрерывны по $t \in [0,T]$. Пусть

$$C(x) = \max_{\substack{|\alpha|\leqslant k \\ t\leqslant T}} |C_\alpha(x,t)|, \quad H = \max_{|\alpha|\leqslant k}|h_\alpha|.$$

Если выполнены условия

$$C(x) \leqslant A|x|^{1-\delta},\ |f(x,t)| + |\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant B\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\right\},$$

где $1 \geqslant \delta > 1-\varepsilon \geqslant 0$, то существует решение задачи (1), единственное в классе функций

$$|u(x,t)| \leqslant C\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\right\}.$$

Приводится пример, показывающий, в каком смысле нельзя ослабить условия теоремы. Приводятся обобщения на нелинейные системы. О. А. Ладыженская

3971. Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка. Гольдберг А. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 254—261

Известно, что дифференциальное уравнение вида

$$P(z, w, w') = 0, \qquad (1)$$

где P — полином от z, w, w', может иметь целые трансцендентные решения только конечного порядка, причем существуют приемы, позволяющие оценить порядок роста решения.

В настоящей статье изучается порядок роста любых однозначных в $|z| < \infty$ интегралов уравнения (1) где P — полином от w'. В частности, если P — полином от всех своих аргументов z, w, w', то каждый однозначный в $|z| < \infty$ интеграл является функцией конечного порядка. Л. И. Донская

3972. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса. Крылов Б. Л., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1956, 31, 203—445

В работах Лаппо-Данилевского проблема Римана для системы Гаусса формулируется следующим образом. Пусть даны матрицы второго порядка W_1 и W_2. Требуется найти такие матрицы второго порядка U_1 и U_2, что система Гаусса двух линейных однородных уравнений, записанная в матричной форме

$$\frac{dX}{dz} = X\left[\frac{U_1}{z-a_1} + \frac{U_2}{z-a_2}\right],$$

имеет решение $X_b(z)$, нормированное в точке $z = b$, т. е. $X_b(z) = I$ (или $X(b) = A$, где определитель матрицы A $D(A) \neq 0$), которое в окрестности особых точек a_1 и a_2 представимо в форме

$$X_b(z) = (z-a_k)^{W_k} X_b^{(k)}(z-a_k),$$

где матрица $X_b^{(k)}(z-a_k)$ голоморфная в окрестности точки $z = a_k$ и $D\left(X_b^{(k)}(0)\right) \neq 0$. Требуется по заданным W_1 и W_2 построить также и саму интегральную матрицу $X_b(z)$. Решение этой проблемы Лаппо-Дани-

левский дает через некоторые ряды весьма сложного характера (но в ясной конструктивной форме). Это решение приведено в § 2 рассматриваемой работы. Б. Л. Крылов строит U_1, U_2 и $X_b(z)$ сначала через интегральные подстановки $V_k = e^{2\pi i W_k}$ $(k = 1, 2)$, а затем через W_1, W_2 при помощи гипергеометрических рядов. Работа состоит из четырех глав. В гл. I показывается, к какому простейшему виду приводятся две матрицы второго порядка преобразованием подобия с помощью одной матрицы. В гл. II показывается, как во всех встречающихся случаях (I, II, III, IV) (стр. 215—228) интегральную матрицу системы Гаусса можно построить при помощи гипергеометрических рядов. Это длинное исследование, основанное на прежних работах автора, завершается общим приемом получения интегральной матрицы системы Гаусса (§ 10). Здесь же выясняются все случаи, когда появляется логарифмический член в фундаментальной системе решений. Устанавливается также связь между каноническими интегральными матрицами, построенными в окрестности различных особых точек. В гл. III находится вид системы Гаусса или вид U_1, U_2, когда интегральные подстановки V_1, V_2 имеют одну из четырех ($I_в$, $II_в$, $III_в$, $IV_в$) (стр. 283, 284) простейших форм. При этом V_1, V_2 — интегральные подстановки некоторой интегральной матрицы. В этом длинном исследовании также широко используются прежние исследования автора и заканчивается это рассуждение таблицей II на стр. 306—310. В § 12 строятся U_1, U_2 такие, что нормированная интегральная матрица $Y_b(z)$ (или $Y(b) = A$) имеет интегральные подстановки V_1, V_2. Здесь шаг за шагом рассматриваются все случаи, которые могут встречаться для различных V_1 и V_2.

Это исследование заканчивается теоремой 9 на стр. 346. В § 13 формулируется окончательное правило построения системы Гаусса, нормированное решение которой имеет интегральные подстановки V_1 и V_2. В § 14 доказывается теорема 10, дающая необходимое и достаточное условие того, что две разные системы Гаусса имеют совпадающие многозначные множители $(z - a_i)^{W_i}$ в особых точках a_1 и a_2. Далее это используется для изучения многозначности систем U_1, U_2 по заданным V_1, V_2. В гл. IV строится множество систем Гаусса, имеющих в особых точках a_1, a_2 показательные подстановки W_1, W_2. В заключение дается выражение для функций Лаппо-Данилевского по виду очень сложное и трансцендентное, решающее проблему Римана для системы Гаусса, через гипергеометрические ряды.

Н. П. Еругин

3973. Особые вопросы краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Вазов (Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order. Wasow Wolfgang), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 1, 93—113 (англ.)

На отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматривается решение $y = y(x, \varepsilon)$ дифференциального уравнения

$$\varepsilon y'' = F(x, y, y', \varepsilon) \tag{1}$$

при краевых условиях

$$y(\alpha, \varepsilon) = l_1 \; y(\beta, \varepsilon) = l_2. \tag{1а}$$

Доказывается существование, при некоторых ограничениях, асимптотического решения уравнения (1), стремящегося при $\varepsilon \to 0$ к решению $y = y_0(x)$ вырожденного уравнения

$$F(x, y, y', 0) = 0 \tag{2}$$

при условии, что начальное значение уравнения (2) совпадает с соответствующим краевым значением для уравнения (1). Ограничения эти состоят в следующем: 1) функция $F(x, y, y', \varepsilon)$ линейна относительно y', т. е.

$$F(x, y, y', \varepsilon) = F_1(x, y, \varepsilon)\, y' + F_2(x, y, \varepsilon), \tag{3}$$

причем предполагается, что функции $F_1(x, y, \varepsilon)$ и $F_2(x, y, \varepsilon)$ аналитические относительно y и ε и класса $C^{(2)}$ относительно x в некоторой окрестности решения $y = y_0(x)$ вырожденного уравнения (2); 2) при $\varepsilon > 0$ предполагается, что вырожденное уравнение

$$F_1(x, y, 0)\, y' + F_2(x, y, 0) = 0 \tag{4}$$

имеет решение $y = y_0(x)$, для которого $y_0(\beta) = l_2$ и $F_1(x, y_0(x), 0) > 0$.

При указанных ограничениях и условиях доказывается следующая теорема: Существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\mu_1 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $|l_1 - y_0(\alpha)| < \mu_1$ решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1а) для уравнения (1) может быть представлено рядом

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \varepsilon)\, \mu^r. \tag{5}$$

Ряд (5) равномерно и абсолютно сходится относительно ε, μ и x в замкнутой области $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $|l_1 - y_0(\alpha)| \leqslant \mu_1$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Члены $u_r(x, \varepsilon)$ этого ряда обладают следующими свойствами: 1) $u_0(x, 0) \equiv y_0(x)$; 2) $u_0(x, \varepsilon)$ представляет собою асимптотический степенной ряд по ε и является формальным решением дифференциального уравнения (1), удовлетворяющим краевому условию на конце $x = \beta$; 3) $\mu = l_1 - u_0(\alpha, \varepsilon)$; 4) функции $u_r(x, \varepsilon)$ $(r > 0)$ имеют вид

$$u_r(x, \varepsilon) = \exp\left\{-\varepsilon^{-1} \int_\alpha^x F_1(t, y_0(t), 0)\, dt\right\} \omega_r(x, \varepsilon),$$

где $\omega_r(x, \varepsilon)$ ограничены.

Автор подробно выписывает первый член ряда, включающий слагаемые порядка ε.

И. С. Градштейн

3974. Об одном признаке ограниченности решений дифференциальных уравнений Хилла. Карасева Т. М., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 4, 549—551

М. Г. Крейном доказано (РЖМат, 1956, 5848), что для ограниченности решений уравнений Хилла

$$y'' + p(t)\, y = 0, \; p(t + T) \equiv p(t)$$

достаточно выполнения условий

$$\int_0^T p(t)\, dt = 0, \; T \int_0^T q^2(t)\, dt < \pi^2/4, \tag{1}$$

где $q(t) = \int p(t)\, dt$, $\int_0^T q(t)\, dt = 0$. Дано доказательство того, что, вопреки предположению М. Г. Крейна (цит. статья, стр. 643 и 568), этот признак является «точным», т. е. что постоянную $\pi^2/4$ нельзя заменить на большую.

В. А. Якубович

3975. Периодические решения уравнения $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, имеющего два тождественно постоянных решения. Сансоне, Конти (Soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + q(x) = 0$ avente due soluzioni singolari. Sansone G., Conti R.), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, 20, № 3—4, 186—195, (итал.)

Доказано существование периодического решения (отличного от $x(t) \equiv \text{const}$) уравнения

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

при условиях: 1) существуют такие $\beta<0<\delta$, что $f(x)<0$ в промежутке (β, δ), $f(x)>0$ вне его; 2) существует такое $\gamma<\beta$, что $g(x)<0$ в промежутке $(\gamma, 0)$, $g(x)>0$ вне его; 3) f непрерывна, g удовлетворяет условию Липшица в каждом конечном интервале; 4) существуют $g'(0), f'(\gamma), g'(\gamma), g''(\gamma)$ и $g'(\gamma)<0$; 5) $F(+\infty)=+\infty$, где $F(x)=\int_0^x f(s)\,ds$; 6) существует такое решение $w(x)$ уравнения

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-g(x)}{z-F(x)}, \qquad (2)$$

что $w(x)\leqslant F(x)$ при $x\geqslant\delta$ и что

$$F(\gamma)\leqslant F(\delta)-\sqrt{F^2(\delta)+[w(\delta)-F(\delta)]^2+2G(\delta)},$$

$$G(x)=\int_0^x g(s)\,ds$$

Уравнение (2) получается из (1) заменой $z=\dot{x}+F(x)$.

Исследовано расположение интегральных кривых уравнения (2) на плоскости (x, z) при условиях 1) —4). В отличие от большинства известных случаев (например, РЖМат, 1956, 2987, 8787; 1957, 3092, здесь имеются две особые точки: седло и фокус (или узел).

Доказано, что уравнение (1) имеет не более одного периодического решения, если выполнены условия 1) —5), а также 6а) $F(\gamma)<0$ и 7) $G(\Delta)=G(\Delta_1)$, где Δ и Δ_1 таковы, что $\gamma<\Delta<\beta$, $\Delta_1>\delta$, $F(\Delta)=F(\Delta_1)=0$.

Приведена теорема, устанавливающая существование периодического решения уравнения (1) путем сравнения с другим уравнением того же вида.

А. Ф. Филиппов

3976. О существовании периодических решений для дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодической правой частью. Рейссиг (Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1955, 14, № 4—6, 341—348 (нем.)

Доказано существование решения с периодом L для уравнения

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\,\dot{x}+g(x)=e(t)$$

при условиях: 1) f, g, e непрерывны и таковы, что решение уравнения непрерывно зависит от начальных условий; 2) $e(t)$ имеет период L; 3) при $|x|>a$, $|v|>b$ имеем $f(x,v)\geqslant 0$, а в оставшейся крестообразной области $f(x,v)\geqslant -f$, $f>0$; 4) $f(x,v)\,v+g(x)\geqslant M$ при $x\leqslant -a$, $v\geqslant c>b$; $f(x,v)\,v+g(x)\leqslant m$ при $x\geqslant a$, $v\leqslant -c$; 5) $g(x)\geqslant M+bf+\delta$ при $x\geqslant a$, $g(x)\leqslant m-bf-\delta$ при $x\leqslant -a$; $\delta>0$.

А. Ф. Филиппов

3977. О связи теоремы Мюнца с ортогональными разложениями. Шноль Э., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 910—912

При помощи аналитических функций доказывается теорема:

Пусть $q(x)>0$ и $\lambda_k<0$. Обозначим единственное (с точностью до множителя) решение уравнения

$$-\psi''+q(x)\,\psi=\lambda_k\psi,$$

имеющее интегрируемый квадрат на $(0, \infty)$, через $\psi(x, \lambda_k)$. Если

$$\sum^{\infty}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}=\infty, \qquad (1)$$

то система функций $\psi(x, \lambda_k)$ полна в $L_2(0, \infty)$.

Эта теорема является обобщением известной теоремы Мюнца. В самом деле, положим $q(x)\equiv 0$ (ограничение $q(x)>0$ в теореме может быть ослаблено) тогда из теоремы следует полнота системы функций $e^{-\sqrt{|\lambda_k|}\,x}$ при условии (1). Полагая $\mu_k=\sqrt{|\lambda_k|}>0$ и $e^{-x}=t$, получим теорему Мюнца: Система функций t^{μ_k} полна на $(0, 1)$, если

$$\sum^{\infty}\frac{1}{\mu_k}=\infty.$$

Доказанная теорема используется автором для исследования зависимости потенциала от предельных фаз (в квантовой теории рассеяния).

И. М. Соболь

3978. Об определении периодических режимов в нелинейной динамической системе с кусочно-линейной характеристикой. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 5, 639—654

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{s}a_{ij}x_j+\rho_i y_1 \quad (i=1, \ldots, s), \qquad (1)$$

где a и ρ — действительные числа, а $y_1=f_1(x_1)$ — заданная кусочно-линейная характеристика. При условии существования периодических решений уравнений (1) находятся уравнения для определения отрезков времени τ_k, в которые функция $x_1(t)$ пробегает конечные звенья, соответствующие прямолинейным отрезкам функции $f_1(x_1)$. Отмечается особый случай, так называемый симметричный, когда $x_i(t+T_1)=-x_i(t)$ $(i=1, \ldots, s)$, где T_1 — полупериод. Сначала уравнения для определения величин τ_k находятся при помощи решений системы (1) по отрезкам, соответствующим звеньям характеристики $f_1(x_1)$, а затем исходя из уравнений $D(p)\,x_1=K(p)\,f(x_1)$ $(p=d/dt)$, которое получается исключением из системы (1) переменных $x_2, \ldots, x_s$.

В заключение уравнения для τ_k в случае трехзвенной характеристики $f_1(x_1)$ и симметрического режима находятся через коэффициенты полиномов $D(p)$ и $K(p)$.

Имеются опечатки. Некоторые рассуждения трудно понять, в силу их краткости.

Н. П. Еругин

3979. Об асимптотической устойчивости систем с последействием. Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 4, 513—518

Второй метод А. М. Ляпунова исследования на устойчивость применяется к системам уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=X_i(x_1(t-\vartheta), \ldots, x_n(t-\vartheta), t) \qquad (1)$$

$$(i=1, 2, \ldots n),$$

где $X_i(y_1(-\vartheta), \ldots, y_n(-\vartheta), t)$ — функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $y_i(-\vartheta)$, $0\leqslant\vartheta\leqslant h$.

Частным случаем систем (1) являются системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Доказывается теорема об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), причем вместо функции Ляпунова берется обладающий аналогичными свойствами функционал $V[y_1(-\vartheta), \ldots, y_n(-\vartheta), t]$. В отличие от аналогичной ранее доказанной теоремы того же автора (РЖМат, 1957, 2316) требуется, чтобы функционал V удовлетворял основным условиям упомянутой теоремы на отрезках изменения аргумента длины $h_1<h$ и притом лиш

на дугах интегральных кривых в смысле некоторого обобщенного расстояния удаляющихся при возрастании t от тривиального решения.

Теорему удобно применять в тех случаях, когда из отрезка $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$ можно выделить меньший отрезок $0 \leqslant \vartheta \leqslant h_1$, $h_1 < h$, который имеет определяющее значение для устойчивости исследуемого решения.

В заключение изложенный метод применяется к двум примерам, в одном из которых рассматривается система вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = Y_i(x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), t) + \\ + X_i(x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), t), \quad (2)$$

где функционалы Y_i определены на функциях $y_i(-\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant h_1$, а функционалы X_i — на функциях $y_i(-\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant h$, $h_1 < h$. Указываются достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2), если асимптотически устойчиво по показательному закону тривиальное решение системы

$$dx_i(t)/dt = Y_i(x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), t).$$

Л. Э. Эльсгольц

3980. Об устойчивости систем с запаздыванием. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 4, 500—512

Второй метод Ляпунова исследования на устойчивость применяется к системам уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = X_i(t, x_j(t), x_{jk}(t-\tau)) \; (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

где $X_i(t, x_j, x_{jk}(t-\tau))$ — функционал, зависящий от t, x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и mn функций $x_{jk}(t-\tau)$, заданных на отрезках $0 \leqslant \tau \leqslant h_{jk}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $k = 1, 2, \ldots, m)$. Системы (1), в частности, охватывают системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Доказываются две теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова, об устойчивости и асимптотической устойчивости, с тем, однако, существенным отличием, что производная dv/dt функции Ляпунова $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается лишь на тех участках решений системы (1), на которых решения возрастают по норме при возрастании t.

В дальнейшем те же две теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости доказываются в несколько иных предположениях. Изложенные теоремы применяются к исследованию на устойчивость пяти типов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в одном из которых запаздывание распределено непрерывно. Л. Э. Эльсгольц

3981 К. Дифференциальные уравнения. Реддик, Кибби (Differential equations. Reddick H. W., Kibbey D. E.), New York, 1956, 304 pp (англ.)

Реферируемая книга представляет собой учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, соответствующий в основном программам инженерных институтов США. Книга является дополненным и переработанным изданием одноименного учебника Реддика, вышедшего в 1943 г. и затем несколько раз переиздававшегося. Отличительной чертой книги является ясность и доступность изложения, которое сопровождается большим числом хорошо подобранных примеров. В книге рассмотрен ряд задач прикладного характера. Для упражнений в конце многих пунктов помещено большое число примеров и задач с физическим смыслом. Гл. 1 носит вводный характер и, кроме предварительных сведений, содержит подробное изложение свойств гиперболических функций. В гл. 2 рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка. Гл. 3 посвящена линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, которые трактуются с операторной точки зрения. Значительная часть задач прикладного характера приурочена к гл. 2 и 3. В гл. 4 излагаются уравнения высших порядков, не содержащие явно искомой функции или независимой переменной, а также уравнения Эйлера. Гл. 5 содержит краткие сведения о системах уравнений. В гл. 6, посвященной линейным уравнениям второго порядка, указаны простые приемы, с помощью которых в некоторых случаях удается найти частное решение. Доказано, что, зная одно частное решение однородного уравнения, можно определить с помощью квадратур другое частное решение, линейно независимое с первым. В гл. 7 излагается интегрирование уравнений посредством обобщенных степенных рядов. Гл. 8, представляющая собой очень краткое введение в уравнения с частными производными, по замыслу авторов призвана лишь вызвать у читателя интерес к этим вопросам, а, отнюдь, не осветить их.

В книге не приводятся доказательства теорем существования и других тонких предложений, но это четко оговорено, и в соответствующих местах сделаны ссылки на учебники, где их можно найти. В. С. Виденский

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3982. О решении задачи Коши—Ковалевской для одного класса уравнений в частных производных в области сколь угодно гладких функций. Гераси менко Л. В., Тр. Казанск. с.-х. ин-та, 1956, вып. 35, 232—238

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} - a_1 \frac{\partial^q u}{\partial x^q} = f(x, t) \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями, где a_1 — постоянное, p, q — любые целые положительные числа.

Указывается необходимое и достаточное условие, наложенное на функцию f для того, чтобы уравнение (1) допускало аналитическое решение по вещественному (или комплексному) переменному t в окрестности $t = 0$.

Если, кроме того, $f(x, t)$ принадлежит классу функций в смысле Жеврея, то аналитическое по t решение уравнения (1) будет сколь угодно раз дифференцируемой функцией по x, в некоторой конечной области x и t.

Эта же задача (для однородного уравнения (1) при неоднородных начальных данных) была решена ранее Г. С. Салеховым (Успехи матем. н., 1947, 2, № 2 (18), 226—228). В. Н. Масленникова

3983. Уравнения в частных производных и теорема А. Кнезера. Хартман, Винтнер (Partial differential equations and a theorem of A. Kneser. Hartman Philip, Wintner Aurel), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 2, 237—255 (англ.)

Пусть $f(x)$ является H-функцией, т. е. удовлетворяет условию Гёльдера на всяком компактном подмножестве евклидова пространства E точек $x = (x_1, x_2, x_3)$. Показано, что если $f(x) \leqslant o(1)$ на E, то уравнение

$$\Delta u + f(x)\, u = 0 \quad (2)$$

имеет единственное решение $u(x)$, допускающее представление в виде

$$u(x) = \nu(x)/r \quad (r = |x|), \quad (3)$$

где

$$0 < \nu(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 < r < \infty \tag{4}$$

и

$$\nu(x) \to 1 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{5}$$

Имеет место соотношение $\int_E - f(x)\, u(x)\, dE < \infty$.

Если (1) заменено условием $\int_0^\infty r \max_{|x|=r} |f(x)|\, dr < \infty$, то $u(x)$ удовлетворяет (3), (4), а также $u(x) \sim 1/r$ при $r \to 0$ и $u(x) \sim \text{const}/r$ при $r \to \infty$. Получены и другие соотношения для $u(x)$.

В доказательствах используется следующая теорема сравнения:

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две H-функции, $f(x) \leqslant g(x)$ и $\Delta w + g(x)\, w = 0$ обладает на множестве $0 < |x| < \infty$ решением $w(x)$ таким, что $w(x) > 0$ и $w(x) \sim 1/r$ при $r \to 0$. Тогда (2) имеет решение вида $w(x) = \nu(x)\, w(x)$, где $\nu(x)$ удовлетворяет (4), (5).

Г. Л. Мизернюк

3984. О проверке граничных условий в некоторых задачах, относящихся к уравнениям в частных производных. Пенна (Sulla verifica delle condizioni al contorno in alcuni problemi relativi ad equazioni a derivate parziali. Penna Anna Maria), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, 14, 329—369 (итал.)

Излагается метод решения задач Дирихле и Неймана для линейного, однородного уравнения в частных производных второго порядка в круге радиуса R с помощью рядов Фурье в полярных координатах. В частности, получается, что решение задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta u - k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - k^2 u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями $u|_{\rho=R} = F(\theta)$ записывается в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = h_0 \frac{I_0(k\rho)}{I_0(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(k\rho)}{I_n(kR)} (h_{-n} e^{-in\theta} + h_n e^{in\theta}), \tag{2}$$

где h_n — коэффициенты Фурье [illegible], I_n — бесселевы функции. Затем [illegible] ряда (2) и его производных с помощью интересных оценок для бесселевых функций. Аналогично исследованы задача Неймана для уравнения (1) и краевые задачи для уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ в трехмерном пространстве.

Ю. В. Синаров

3985. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с ограниченными начальными условиями. Майлс, Вильямс (The Cauchy problem for linear partial differential equations with bounded boundary conditions. Miles E. P., Jr, Williams Ernest), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 426—431 (англ.)

Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными

$$\Phi(D, x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u + \Psi(D, t)\, u = 0, \tag{1}$$

где оператор Ψ содержит только производные по t порядка s.

Сначала рассматриваются начальные данные вида

$$u|_{t=0} = P(x_1, \ldots, x_n); \quad \left.\frac{d^j u}{dt^j}\right|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, s-1,$$

где функция P обращается в нуль после применения к ней конечного числа раз оператора Φ.

Доказывается теорема: Пусть для некоторого k

$$\Phi^k(P) \neq 0; \quad \Phi^{k+1}(P) = 0; \tag{3}$$

и предположим, что $u_0, u_1, \ldots, u_k$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Psi(u_j) + u_{j-1} = 0, \quad \Psi(u_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

с начальными условиями

$$u_0(0) = 1; \quad u_j(0) = 0; \quad \frac{d^m u_j}{dt^m}(0) = 0$$

$$m = 1, 2, \ldots, s-1; \quad k \geqslant j \geqslant 1;$$

тогда решение (1), удовлетворяющее условиям (2), дается формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{j=0}^{k} \Phi^j(P)\, U_j.$$

Аналогичная теорема доказывается при $s = 2$ для начальных данных

$$u|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = Q(x_1, \ldots, x_n).$$

Затем применяются полученные теоремы к построению базисного множества полиномиальных решений для волнового уравнения, а также к задаче Коши для волнового уравнения и для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (РЖМат, 1956, 4537).

Так, решение волнового уравнения с начальными данными

$$u|_{t=0} = P(x, y, z); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x, y, z),$$

где P и Q — полигармонические функции порядка p и q соответственно дается формулой

$$u(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^{p-1} \nabla^{2j}(P)\, \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \sum_{k=0}^{q-1} \nabla^{2k}(Q)\, \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

В. Н. Масленникова

3986. О продолжении одной теоремы Пеано и неразрешимости некоторых уравнений с частными производными. Хорних (Über die Weiterführung eines Satzes von Peano und die Unlösbarkeit gewisser partieller Differentialgleichungen. Hornich H.), Rend. Seminar mat. Univ. a Politecn., Torino, 1954—1955, 14, 33—37 (нем.)

Автор замечает, что если уравнение

$$y' = \varphi(x, y) \tag{1}$$

с непрерывной функцией $\varphi(x, y)$, определенной в некоторой области G, таково, что в любой подобласти области G найдется пара точек, соединимых двумя различными интегральными кривыми уравнения (1), то уравнение с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{2}$$

не имеет решений ни при какой функции f, имеющей непрерывную частную производную df/dy, не тождественно равную нулю (действительно, достаточно, предположив существование решения, взять в области, где df/dy имеет постоянный знак, две точки, соединимые различными интегральными кривыми уравнения (1), и проинтегрировать обе части уравнения (2) вдоль этих интегральных кривых: интегралы от левой части будут равны, а от правой — нет).

В работе дается, кроме того, идея конструкции функции $\varphi(x, y)$, для которой уравнение (1) обладает указанными свойствами, и показывается, что множество таких функций φ всюду плотно в пространстве C непрерывных функций.

Примечание референта. По поводу конструкции функции $\varphi(x, y)$, автор ссылается на свои работы 1954 и 1955 гг. Следует, однако, заметить, что впервые такая функция была построена М. А. Лаврентьевым (Math. Z., 1925, 23, 197—209).

Е. М. Ландис

3987. О задаче Коши и фундаментальных решениях. Диас (On Cauchy's problem and fundamental solutions. Diaz J. B.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 235—247 (англ.)

Краткий обзор результатов, полученных группой математиков Института динамики жидкости и прикладной математики Мэрилэндского университета в трех различных направлениях. Прежде всего рассматривается метод Мартина решения задачи Коши для уравнения $Lu \equiv u_{xy} - a(x, y)\,u_x - b(x, y)\,u_y = 0$ (обобщающий известный метод Римана), основанный на тождестве $(v_x/\varphi_x - v_y/\varphi_y)\,Lu + (u_x/\varphi_x - u_y/\varphi_y)\,Mv \equiv \equiv (u_x v_x/\varphi_x)_y - (u_y v_y/\varphi_y)_x$, где $Mv \equiv v_{xy} - b\varphi_y v_x/\varphi_x - a\varphi_x v_y/\varphi_y$, а φ — некоторое решение уравнения $Lu = 0$, для которого $\varphi_x\varphi_y \neq 0$ (Martin M., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57; 238—249). Этот метод распространен Диасом и Мартином (РЖМат, 1956, 1341) на случай нескольких аргументов; в качестве примера разобран вывод по этому методу формулы Пуассона в трехмерном пространстве. Далее приведены результаты исследования задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу $u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = u_{tt} + ku_t/t$, $u(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $u_t(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Отправной здесь явилась работа Вайнштейна (Weinstein A., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 2584—2585), в которой к этой задаче применены рекуррентные формулы (относительно k). По поводу дальнейших результатов см. РЖМат, 1955, 248, 4438, 5047. Наконец, рассмотрено эллиптическое уравнение $u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} + u_{yy} + ku_y/y = 0$. Здесь следует отметить формулу для фундаментального решения с особенностью в точке $x_1 = \cdots = x_n = 0$, $y = b > 0$ при $k > 0$: $u = \int_0^\pi \sin^{k-1}\alpha\,(\sum_{i=1}^n x_i^2 + b^2 + y^2 - 2by\cos\alpha)^{(1-n-k)/2}\,d\alpha$. Прочие результаты см. РЖМат, 1954, 1666; 1955, 1278, 2207, 4433; 1956, 1367). Замеченные опечатки: на стр. 241, строка 11 сверху, вместо $k \geqslant n-1$ должно быть $k < n-1$; на стр. 246, строка 9 сверху, вместо (14) должно быть (23).

А. Д. Мышкис

3988. О задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих малый параметр. Панайоти Б. Н., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1955, 7, 110—128 (рез. азерб.)

Работа представляет собою подробное изложение содержания статьи автора (РЖМат, 1955, 4420).

И. С. Градштейн

3989. О единственности решения задачи Коши для квазилинейных симметрических систем дифференциальных уравнений. Слободецкий Л. Н., Храмова М. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 155—162

Для симметричной системы 1-го порядка

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{du}{dx_i} + f, \qquad (1)$$

$$A_i = (a_{jk}^{(i)})\,(a_{jk}^{(i)}(x, u) = \bar{a}_{kj}^{(i)}); \quad u = (u_1, \ldots, u_N),$$

где

$$f(t, x, u) = (f_1, \ldots, f_N), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

доказывается теорема единственности: 1) если $a_{jk}^{(i)}$ непрерывны и имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_N$ в области D пространства (x, u, t); 2) если $|f(t, x, u) - f(t, x, v)| \leqslant \Phi(|u - v|)$ в D, где $F(z) = \sqrt{z}\,\Phi(\sqrt{z})$ положительная, неубывающая и невыпуклая функция и $\int_0^\delta \frac{dz}{F(z)} = \infty$ $(\delta > 0)$, то в некоторой «фундаментальной» конической области $\Omega(T) \subset D$, примыкающей к сечению D плоскостью $t = 0$, может существовать только одно непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши для системы (1).

Для симметричной системы 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,\,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(t, x, u, \frac{du}{dt}, \frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_n}\right), \qquad (2)$$

(где $A_{ij}\left(t, x, u, \frac{du}{dt}, \frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_n}\right) = A_{ji}$, причем $\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}\xi_i, \xi_j) \geqslant \mu^2 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$ для любых векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$) доказывается аналогичная теорема единственности решения задачи Коши, в предположении непрерывной дифференцируемости матрицы A_{ij} по всем ее аргументам и выполнения неравенства

$$|f(t, x, u, u^0, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) - f(t, x, v, v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})| \leqslant \leqslant \Phi\left[(|u - v|^2 + \sum_{k=0}^n |u^{(k)} - v^{(k)}|^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

где $F(z) = \sqrt{z}\,\Phi(\sqrt{z})$ обладает ранее указанными свойствами. В заключение авторы указывают на возможность доказательства разрешимости задачи Коши для симметрических систем (1), (2) при условиях, аналогичных условиям С. Л. Соболева, данных для решения одного гиперболического квазилинейного уравнения 2-го порядка (Матем. сб., 1939, 5 (47), 71—100).

Л. И. Камынин

3990. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. Яненко Н. Н., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 1, 44—47

Для системы квазилинейных уравнений

$$\sum_{(i,\,j)} a_{ijk}(u_1, \ldots, u_m)\frac{du_j}{dx_i} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, m,$$

дается способ нахождения всех бегущих волн, т. е. решений вида

$$u_i = f_i(\tau)\ (\tau = \tau(x_1, \ldots, x_m),\ i = 1, 2, \ldots m).$$

В качестве примера рассматриваются уравнения гидромеханики изэнтропического движения. В трехмерном случае получено решение, зависящее от трех произвольных функций, в плоском случае — от двух. В случае одномерного движения бегущая волна является известной волной Римана. В. М. Бабич

3991. О методе прямых для некоторых краевых задач. Б у д а к Б. М., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 1, 9—12

Приводится ряд оценок погрешностей при решении методом прямых уравнений

$$u_{xy} = a(x, y)\,u + f(x, y), \quad u_{x,y} = A(x, y, u),$$
$$\rho(x)\,u_{tt} = (\sigma(x)\,u_x)_x - q(x)\,u + f(x, t),$$
$$\rho(x)\,u_t = (\sigma(x)\,u_x)_x - q(x)\,u + f(x, t).$$

Для первых двух уравнений рассмотрена задача Гурса, для последних двух — смешанная задача. Доказательства отсутствуют. В. М. Бабич

3992. Об оценке области существования решений нелинейного уравнения с частными производными первого порядка. П л и с ь А., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 3, 121—125

Для уравнения

$$\partial z/\partial x = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, \partial z/\partial y_1, \ldots, \partial z/\partial y_n) \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(a, y_1, \ldots, y_n) = \omega(y_1, \ldots, y_n) \quad (2)$$

строится система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $y_i(x)$, $z(x)$ и других переменных и доказывается, что если последняя имеет решение в интервале $\Delta \ni a$, а функции f и ω принадлежат классу C^p в некоторых областях изменения своих аргументов, то в окрестности кривой («характеристики»)

$$Y(x) = \{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}, \quad x \in \Delta, \quad Y(a) = B$$

существует решение уравнения (1), принадлежащее классу C^p и удовлетворяющее в некоторой окрестности точки B условию (2).

Получена также оценка области существования решения уравнения

$$\partial z/\partial x = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n, \partial z/\partial y_1, \ldots, \partial z/\partial y_n).$$

Р. Э. Виноград

3993. О системах линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. II. С е г р е (Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. S e g r e B e n i a m i n o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 4, 395—403 (итал.)

Часть I см. РЖМат., 1957, 2263

Изучаются системы вида

$$\alpha_1 y = u_1, \quad \alpha_2 y = u_2, \ldots, \quad \alpha_h y = u_h, \quad (1)$$

где α — дифференциальные операторы вида

$$\sum a_{k_1 \ldots k_n} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

y — неизвестная, u_i — известные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Операторам α ставятся в соответствие характеристические полиномы

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \quad (2)$$

и гиперповерхности

$$\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Доказывается, что если выполняются условия 1) $u_1, \ldots, u_h$ — аналитические функции, 2) $2 \leqslant h \leqslant$ и 3) характеристические гиперповерхности (2) имеют общее пересечение $\mathfrak{k}$ измерения $n - h$, то для того чтобы система (1) имела какое-либо решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_i u_j = \alpha_j u_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, h.$$

Изучается число произвольных постоянных в общем интеграле системы (1) в зависимости от вида гиперповерхности $\leqslant$. М. И. Альмухамедов

3994. Непрерывная зависимость и дифференцируемость по параметрам решения задачи Гурса для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Б а г и р о в Х. Г., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1955, 7, 55—65 (рез. азерб.)

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_k} = \Phi_{i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_s; u_1, u_2, \ldots, u_N; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m),$$
$$u_{i_k}\big|_{x_k = x_k^0} = \varphi_{i_k}(x_1 x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_s; \varepsilon_1 \varepsilon_2; \ldots, \varepsilon_m)$$

$$k = 1, 2, \ldots, s; \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1;$$
$$i_2 = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2; \ldots$$
$$i_s = n_1 +, \ldots, + n_{s-1} + 1, \ldots, n_1 + n_2 + \ldots + n_s,$$

где Φ_{i_k}, φ_{i_k} непрерывны и Φ_{i_k} по u_j удовлетворяют условию Липшица. Сводя задачу к эквивалентной системе интегральных уравнений, автор методом последовательных приближений доказывает существование, единственность решения и непрерывную зависимость его от параметров ε_j. Требуя дополнительно непрерывную дифференцируемость Φ_{i_k} по всем u_j, ε_j и φ_{i_k} по всем ε_j до порядка $p \geqslant 1$, автор доказывает, что решение имеет непрерывные производные по параметрам до того же порядка. Б. Н. Панайотти

3995. Об инвариантах систем Векуа. М о и с и л (Asupra invariantilor sistemelor lui Vecua. M o i s i l G r. C.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 1 Nota I. 7—11, Nota III. 13—19; Nota II. Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, 1954, 6, № 3, 595—601 (рум. рез. русс., франц.)

Приведем краткое содержание этих работ. В результате конформного преобразования независимых переменных

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y) \quad (1$$

система уравнений с частными производными

$$u_x - v_y = au + \beta v, \quad u_y + v_x = \gamma u + \delta v \quad (2$$

переходит в систему

$$u_{\bar{x}} - v_{\bar{y}} = \bar{a}u + \bar{\beta}v, \quad u_{\bar{y}} + v_{\bar{x}} = \bar{\gamma}u + \bar{\delta}v, \quad (3$$

причем имеют место соотношения

$$f = \frac{\bar{\alpha} - i\bar{\gamma}}{\alpha - i\gamma} = \frac{\bar{\beta} - i\bar{\delta}}{\beta - i\delta}, \quad (4$$

где $f = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + i\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}$ является моногенной функцией переменного $z = x + iy$.

Условия (4) и требование моногенности $f(z)$ достаточны для эквивалентности систем (2) и (3) при преобразовании независимых переменных (1).

Кривые, заданные уравнениями

$$\alpha dx + \gamma dy = 0, \quad \beta dx + \delta dy = 0,$$

являются конформными инвариантами.

Систему (2) можно переписать в виде

$$Dw = Hw + k\overline{w}, \tag{5}$$

где $D = \partial/\partial x + i\partial/\partial y$, $w = u + iv$, $H = \lambda + i\mu$, $k = \sigma + i\tau$, $\overline{w} = u - iv$, причем $\alpha = \lambda + \sigma$, $\beta = -\mu + \tau$, $\gamma = \mu + \tau$, $\delta = \lambda - \sigma$.

Системы

$$Dw = Hw, \tag{6}$$

$$Dw = k\overline{w} \tag{7}$$

имеют инвариантную форму.

При линейном преобразовании неизвестных функций

$$u = au^* + bv^*, \quad v = cu^* + dv^*, \tag{8}$$

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

вид системы

$$a^1u_x + a^2u_y + b^1v_x + b^2v_y = au + \beta v,$$

$$c^1u_x + c^2u_y + d^1v_x + d^2v_y = \gamma u + \delta v \tag{9}$$

сохраняется.

При этом выражения

$$I = a^1d^1 - a^2d^2 - b^1c^1 + b^2c^2$$

$$J = a^1d^2 + a^2d^1 - b^1c^2 - b^2c^1$$

являются инвариантами. Если эти инварианты равны нулю, то система (9) может быть приведена к виду (2) или, что то же самое, (5). Последнее уравнение в результате преобразования

$$w = \mu w^*, \tag{10}$$

где $w^* = u^* + iv^*$, $\mu = a + bi$, принимает вид

$$Dw^* = H^*w^* + k^*\overline{w}^*.$$

Здесь $H^* = H - D\lg\mu$, $k^* = \dfrac{\overline{\mu}}{\mu}k$

Выражения $|k^*| = |k|$ и $G = \Delta\lg k + D\overline{H} - \overline{D}H$, где Δ — оператор Лапласа, являются инвариантами преобразования (10).

Система (5) при помощи линейного преобразования неизвестных функций может быть приведена к виду $Dw = k\overline{w}$.

Дается также геометрическая интерпретация системы (9) и рассмотренных выше инвариантов в n-мерном проективном пространстве. В работе имеются опечатки. А. В. Бицадзе

3996. О теореме сравнения для самосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Хартман, Винтнер (On a comparison theorem for self-adjoint partial differential equations of elliptic type. Hartman Philip, Wintner Aurel), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 862—865 (англ.)

В ограниченной открытой области T n-мерного x-пространства, граница которой S имеет непрерывную нормаль, рассматривается пара линейных эллиптических самосопряженных уравнений:

$$(g^{\alpha\beta}u_\alpha)_\beta + fu = 0, \tag{1}$$

$$(G^{\alpha\beta}U_\alpha)_\beta + FU = 0, \tag{2}$$

коэффициенты которых непрерывны на $T + S$. Доказывается теорема сравнения: Пусть $f \leqslant F$ и $(g_{\alpha\beta}) \leqslant (G_{\alpha\beta})$, т. е. матрица $(G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$ неотрицательна (здесь $(g_{\alpha\beta}) = (g^{\alpha\beta})^{-1}$), причем или $f \not\equiv F$ на $T + S$ или $(G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$ строго положительно определена в некоторой точке $x = x_0$, где $F(x_0) \neq 0$. Тогда, если существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u|_S = 0$ и нет такой открытой подобласти T, где $u \equiv 0$, то всякое решение $U(x)$ уравнения (2) обращается в нуль где-нибудь на $T + S$.

При $n = 1$ эта теорема переходит в классическую теорему Штурма. Л. Д. Фаддеев

3997. Собственные значения и максимальные области для квазилинейного эллиптического уравнения. Дафф (Eigenvalues and maximal domains for a quasi-linear elliptic equation. Duff George F. D.), Math. Ann., 1956, **131**, № 1, 28—37 (англ.)

Пусть V — N-мерное риманово пространство с положительно определенной и аналитической метрикой

$$ds^2 = a_{ik}dx^idx^k.$$

Пусть далее D — ограниченная область V с границей B, принадлежащей классу C^4 в данной системе координат x^i.

Изучаются задачи Дирихле и Неймана для квазилинейного уравнения

$$\Delta u = (\nabla u)^2 + \lambda\rho(P) \quad (P = (x^1, \ldots, x^n) \in D), \tag{1}$$

где

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a}\,a^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right),$$

$$(\nabla u)^2 = a^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^k},$$

$|a^{ik}|$ — матрица, обратная относительно $|a_{ik}|$, λ — вещественный параметр, $\rho(P)$ — положительная аналитическая функция и a — определитель $|a_{ik}|$.

Используя известные результаты относительно задач Дирихле и Неймана для линейного однородного уравнения

$$\Delta\varphi + \lambda\rho\varphi = 0, \tag{2}$$

к которому уравнение (1) сводится преобразованием $\varphi = e^{-u}$, автор получает следующие результаты:

Теорема 1. Пусть λ_1 — наименьшее собственное значение задачи Дирихле для уравнения (2). Если $\lambda < \lambda_1$ и $f(P)$ — непрерывная функция на B, то существует единственное регулярное решение $u(P)$ задачи Дирихле для уравнения (1) с граничным условием $u(P)|_B = f(P)$. Если к тому же $\lambda \leqslant 0$ ($\lambda \geqslant 0$), то наименьшее (наибольшее) значение $u(P)$ достигается на B. При $\lambda \geqslant \lambda_1$ задача не имеет регулярного в $D + B$ решения.

Теорема 2. Пусть $f(P) > 0$ и непрерывна на B, а μ_1 — наименьшее собственное значение задачи Неймана для (2) с граничным условием

$$\partial\varphi/\partial n + f(P)\varphi|_B = 0.$$

Тогда задача Неймана для (1) с граничным условием

$$\partial u/\partial n = f(P)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu_1$.

Теорема 3. Пусть $q(P)$ — неотрицательная аналитическая функция и $\rho(P)$ положительна на B. Существует только одно значение λ, для которого уравнение

$$\Delta u = (\nabla u)^2 - q(P)$$

с граничным условием на B

$$\partial u/\partial n = f(P) - \lambda\rho(P)$$

имеет решение.

Рассматривается также задача Дирихле для более общего уравнения

$$\Delta u = K(u)(\nabla u)^2 + \lambda\sigma(P, u).$$

Л. Н. Слободецкий

3998. **Условия эллиптичности. Шварц** (Conditions d'ellipticité. Schwartz L.), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 4, 1—7 (франц.)

По определению автора, дифференциальный оператор D с бесконечно раз дифференцируемыми коэффициентами называется эллиптическим (соответственно аналитично-эллиптическим), если в каждом открытом множестве из бесконечно раз дифференцируемости (аналитичности) $D \cdot T$ следует бесконечно раз дифференцируемость (аналитичность) T при любом T. Исходя из этого определения, автор устанавливает необходимое и достаточное условие эллиптичности (аналитично-эллиптичности) дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Аналогично дается определение эллиптичности (аналитично-эллиптичности) матричного дифференциального оператора и устанавливается ряд теорем о его свойствах. А. В. Бицадзе

3999. **Обобщенная краевая смешанная задача для уравнения Лапласа. Тихов М. Н.**, Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1956, вып. 16, 175—177

Формулируется теорема о разрешимости и единственности одной смешанной задачи для гармонических функций. Формулировка теоремы нуждается в уточнениях. В. Н. Масленникова

4000. **Абсолютные матричные инварианты для систем Лапласова типа. Элиану** (Invarianți matriciali absoluți pentru sistemele de tip Laplace. Elianu I. P.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 4, 847—852 (рум.; рез. русс., франц.)

Для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, имеющей в матричной записи вид

$$Z_{xy} + AZ_x + BZ_y + CZ = 0,$$

автором установлен ряд инвариантов преобразования

$$Z = \lambda(x, y)\,\overline{Z},\quad x = f(\overline{x}),\quad y = g(\overline{y}),$$

где λ, f и g — скаляры, а $\overline{Z}$ — новый искомый вектор. А. В. Бицадзе

4001. **О задаче Коши для уравнения Лапласа в случае трех независимых переменных. Бертолини** (Sul problema di Cauchy per l'equaz one di Laplace in tre variabili indipendenti. II. Bertolini Fernando), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 121—128 (итал.)

См. РЖМат, 1956, 432; 1957, 3149

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа. Задача рассматривается в пространственной области D, граница которой FD гомеоморфна сфере и принадлежит классу C''. Данные Коши задаются на некоторой поверхности S — части FD, ограниченной кривой C, гомеоморфной окружности. На FD налагается следующее ограничение. Предполагается, что существует система гармонических векторов $v_k(P)$, обладающая свойствами: а) любую гармоническую в ограниченной области функцию можно равномерно аппроксимировать функциями $\operatorname{div} v_k(P)$; б) система векторов

$$w_k(P) = \operatorname{div} v_k(P) \cdot n_p + \operatorname{rot} v_k(P) \wedge n_p, \qquad P \in FD—S$$

полна в гильбертовом пространстве векторов, определенных на $FD—S$.

Полученные в работе необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши заключаются в следующем: система n линейных уравнений, определенным образом построенная по функциям $v_k(P)$ и данным Коши, всегда разрешима, а построенный по ее решению ряд сходится при $n \to \infty$ к функции, удовлетворяющей некоторому функциональному соотношению на C.

В заключение показывается, что система векторов $v_k(P)$ всегда существует в случае, когда поверхность $FD—S$ аналитическая. М. М. Лаврентьев

4002. **Нижние границы интеграла Дирихле в n-мерном евклидовом пространстве. Мак-Махон** (Lower bounds for the Dirichlet integral in Euclidean n-space. McMahon James), Proc. Roy. Irish. Acad., 1956, A58, № 1, 1—12 (англ.)

Пусть область V n-мерного евклидова пространства является дополнением к конечной области v, ограниченной поверхностью B. Для оценки снизу интеграла Дирихле

$$\int_V |\operatorname{grad} u|^2\, dV,$$

гармонической в V функции u, такой что $u|_B = 1$, вводятся пирамидальные скалярные, векторные и тензорные поля, обобщающие для любого $n \geqslant 3$ аналогичные построения автора для $n = 3$ в работе (РЖМат, 1955, 1778), в которой $\bar{V}$ — куб трехмерного пространства. Х. Л. Смолицкий

4003. **Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. Мергелян С. Н.**, Докл. АН СССР, 1956, 107, № 5, 644—647

В трехмерном пространстве рассматривается гладкая поверхность σ. На σ задается пара непрерывных функций f_1 и f_2. Исследуется задача об одновременной аппроксимации функции f_1 гармонической функцией, а функции f_2 нормальной производной этой гармонической функции (о приближенном решении задачи Коши для уравнения Лапласа). Рассматриваются случаи, когда аппроксимирующие функции принадлежат классам: 1) гармонических полиномов степени не выше m, 2) гармонических и ограниченных числом M в заданной области функций.

Даются оценки (близкие к точным) для такого рода аппроксимации через модули непрерывности функций f_1 и f_2 и модуль гладкости поверхности σ.

Для аппроксимации ограниченными, гармоническими в области функциями, в случае, когда область есть h-окрестность поверхности σ, а ограничивающая константа M фиксирована, дается оценка, зависящая от h.

Далее рассматривается замкнутая гладкая поверхность σ. Дается условие на функции f_1 и f_2, при котором возможна сколь угодно точная аппроксимация (при произвольных m и M).

Для случая, когда это условие не выполнено, вводится мера отклонения аппроксимирующих функций

от f_1 и f_2, с помощью весовой функции. Исследуется при каких весовых функциях возможна сколь угодно точная аппроксимация в смысле введенной меры отклонения.

Наконец, формулируются следующие теоремы:

Пусть σ — замкнутая гладкая поверхность. Пусть на σ задана функция $M(Q)$, $0 \leqslant M(Q) \leqslant \infty$, растущая вблизи некоторой точки Q_0 так, что

$$M(Q) > \exp\{1/|QQ_0|^{2+\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда для всякой точки P области G, ограниченной поверхностью σ, и для всякого числа N существует гармоническая функция H, непрерывная вместе со своими первыми частными производными в $\bar{G}$, такая, что $H(P) > N$ и $H(Q) < M(Q)$ при $Q \in \sigma$.

Пусть $H(P)$ — гармонична внутри сферы $|PQ| < R$ и непрерывна вместе со своими первыми частными производными в $|PQ| \leqslant R$. Пусть вблизи некоторой точки Q_0 сферы

$$|H(Q)| + \left|\frac{\partial H(Q)}{\partial n}\right| < \exp\left\{-\frac{1}{|QQ_0|^{2+\varepsilon}}\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда $H(P) \equiv 0$. Все перечисленные предложения приводятся без доказательств. Е. М. Ландис

4004. **О дискретных операторах, связанных с задачей Дирихле.** М а л л е р (On discrete operators connected with the Dirichlet problem. M u l l e r M e r v i n E.), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 1, 89—113 (англ.)

Работа посвящена численному решению N-мерной задачи Дирихле

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D; \quad u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma[D]$$

при некоторых предположениях о регулярности $f(x)$ и $\Gamma[D]$. Процесс состоит из двух этапов: построение дискретного (конечномерного) оператора, аппроксимирующего задачу Дирихле, и решения полученной дискретной задачи.

Дискретный оператор $\overline{U}_k$ строится на основании теоремы о среднем значении для гармонических функций,

$$\overline{U}_k(x_0, r, v, w) = \sum_{j=1}^{k} w_j u(x_0 + r_j v_j),$$

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = 1, \quad k \geqslant N+1,$$

где v_j — некоторые единичные векторы. Рассматриваются только такие $\overline{U}_k$, для которых либо $r_j = r$, либо $w_j = 1/k$.

Оператор $\overline{U}_k$ называется k-точечным гармоническим приближением порядка m (в точке x_0), если

$$\overline{U}_k(x_0, r, v, w) = u(x_0) + O(\hat{r}^m), \quad \hat{r}^m = \min r_i^m,$$

для всех гармонических в D функций $u(x)$; k-точечное гармоническое приближение порядка m с данными $\hat{r}$ называется оптимальным гармоническим приближением порядка m в точке x_0, если не существует другого k_1-точечного гармонического приближения порядка m_1 в точке x_0 (с тем же $\hat{r}$), где $k_1 \leqslant k$ и $m_1 \geqslant m$.

Ставится задача отыскания так называемых допустимых сеток, сбеспечивающих оптимальное гармоническое приближение одного и того же порядка для всех внутренних точек из D. Приведем некоторые результаты. При $k = N+1$ допустимой сеткой, обеспечивающей $O(\hat{r}^3)$, является симплициальная сетка — множество целых точек $y = (y_1, \ldots, y_{N+1})$ (с точностью до множителя $r/\sqrt{N^2+N}$), лежащее в $N+1$-мерной плоскости $y_1 + \ldots + y_{N+1} = 0$ и удовлетворяющее сравнениям $y_1 \equiv y_2 \equiv \ldots \equiv y_N \equiv 0$, или $1 \pmod{N+1}$. При $k = N+2$, $N \geqslant 3$ — нечетное, нельзя построить $\overline{U}_{N+2}$ порядка 3. При N четном указан способ построения $\overline{U}_{N+2}$ порядка 3. $\overline{U}_k$ имеет порядок 4, если $k = 2N$, $w_j = 1/2N$, $r_j = r$ и v_j суть $\pm i_k$, где i_k — N-мерный ортонормальный базис (гиперкубическая сетка). При $N = 3$ кубическая сетка является допустимой; при $N > 3$ вопрос остается открытым.

Более полные результаты получены при $N = 2$. В этом случае существуют только 3 класса допустимых сеток: треугольные, квадратные и шестиугольные, обеспечивающие соответственно порядок приближения 3, 4 и 6. Полученный результат оправдывает употребление именно таких сеток, как «наилучших», в практике вычислений (Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, Л.—М., 1949, гл. III).

Вместо обычно употребляемой гиперкубической сетки предлагается использовать симплициальную сетку как более экономную. При этом граница $\Gamma[D]$ заменяется дискретным множеством точек, состоящим из точек пересечения отрезков, соединяющих произвольную точку сетки с вершинами соответствующего ей симплекса.

Для приближенного решения полученной дискретной задачи предлагается использовать метод Монте-Карло, реализуя соответствующее случайное блуждание фиктивной частицы на симплициальной сетке, аналогично тому, как это делалось раньше (например, Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., Успехи матем. н., 1940, 8, 125—160) для гиперкубической сетки.

Теоретическая основа для применения метода Монте-Карло дается следующим результатом:

$$\sum_y f(y) P_r[y/x_0; r] \to u(x_0) \text{ при } r \to 0,$$

где суммирование распространено на все дискретные точки y границы $\Gamma[D]$. Здесь $P_r[y/x_0; r]$ есть вероятность того, что частица, вылетевшая из точки $x_0 \in D$, при случайном блуждании на сетке рано или поздно попадет в точку $y \in \Gamma[D]$, где, по определению, блуждание прекращается.

В конце работы даются некоторые указания на детали вычислений и программирования. Библ. 36 назв.

В. С. Владимиров

4005. **О сходимости рядов предельно гармонических функций.** Ч е р п а к о в П. В., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1954, № 2, 8—11

4006. **О предельных соотношениях между решениями параболического и эллиптического типа.** Ч е р п а к о в П. В., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1954, № 2, 3—7

4007. **Теоремы единственности задачи Трикоми. II.** П р о т т е р (Uniqueness theorems for the Tricomi problem. II. P r o t t e r M. H.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 5, 721—732 (англ.)

Часть I см. РЖМат., 1954, 1658

Доказана единственность решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad K(0) = 0, \quad K'(y) > 0$$

при следующих условиях:

1) $K(y)$ имеет непрерывную производную третьего порядка, причем $K'''(y) \leqslant 0$, при $y < 0$;

$$2)\quad F(y) \equiv \frac{3K'^2(y) - 2K(y)K''(y)}{K'^2(y)} < 0 \text{ при } y < 0.$$

Кроме того, автор разбирает вопрос существования и единственности решения известной газодинамической задачи, поставленной Ф. И. Франклем (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, 9, 121—143). А. В. Бицадзе

4008. **О единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина.** У Синь-моу, Дин Ся-чи (查普里根方程的特里谷米問題的唯一性. 吳新謀, 丁夏畦), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 3, 393—399 (кит.; рез. франц.)

Для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0,\quad K(0) = 0,\quad K'(0) > 0$$

доказывается единственность квазилинейного решения задачи Трикоми при следующих условиях: 1) при $y < 0$, $F(y) = 2(K/K')' + 1 < 0$; 2) эллиптическая часть смешанной области, в которой ищется решение, лежит между прямыми $x = \alpha$ и $x = \alpha + 2\pi/\beta$, где α — произвольная константа, а $\beta = \max\limits_{y>0} \left[K'F(y)/2K\sqrt{-K}\right]$. А. В. Бицадзе

4009. **К плоской бигармонической проблеме в областях с угловыми точками.** Бабушка (O rovinném biharmonickém problému v oblastech s úhlovými body. Babuška I.), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 448—453 (чеш.; рез. русск., нем.)

Содержанием работы является доказательство того, что теоремы из работы (РЖМат, 1956, 7365), которые были доказаны для областей с достаточно гладкой границей, справедливы и для областей с кусочно-гладкой границей, т. е. с границей, обладающей угловыми точками. M. Zlámal

4010. **К разрешимости гиперболических уравнений.** Хорних (Zur Lösbarkeit der hyperbolischen Differentialgleichungen. Hornich H.), Österr. Ingr.-Arch., 1956, 10, № 2—3, 195—197 (нем.)

Показывается, что для каждого гиперболического в области G уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y)$$

(где $ac - b^2 < 0$, $ac \neq 0$; $\inf|a| > 0$ и a, b, c, d, e, P — равномерно непрерывные в области G функции) существует сколь угодно близкое к нему дифференциальное уравнение (т. е. уравнение, соответствующие коэффициенты которого сколь угодно близки к коэффициентам данного уравнения) с непрерывными коэффициентами, которое неразрешимо в классическом смысле как во всей области G, так и в любой ее подобласти. Л. И. Камынин

4011. **Геометрическая трактовка линейных гиперболических уравнений второго порядка.** Дуглис (A geometric treatment of linear hyperbolic equations of second order. Douglis A.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 231—234 (англ.)

Излагается идея исследования линейных гиперболических уравнений второго порядка при помощи применения функции Грина на поверхности характеристического конуса. При этом сначала для любой точки $Q: x_i = \xi_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ с помощью замены независимых переменных (оставляющей Q на месте), умножения искомой функции на переменный множитель и всего уравнения на общий множитель данное уравнение преобразуется к нормальному виду:

$$\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(h^{ij}(y; Q)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) + \sum_i k^i(y; Q)\frac{\partial u}{\partial y_i} + f(y; Q)u = g(y; Q),$$

причем удовлетворяются следующие условия: прямая $y_1 = \xi_1, \ldots, y_n = \xi_n$ является бихарактеристикой и на ней $h^{00} = -h^{11} = \ldots = -h^{nn} = 1$, $h^{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $\partial h^{kl}/\partial y_m = 0$ $(k, l, m = 0, \ldots, n)$; $\det(h^{ij}(y; Q)) \equiv -1$; конусы $y_0 + \sqrt{(y_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (y_n - \xi_n)^2} = \text{const}$ характеристические, а их образующие являются бихарактеристиками. Решение задачи Коши, подробно изложенное в другой работе автора (РЖМат, 1956, 1344), приводится к интегральному уравнению типа Вольтерра и аналогично известным работам Матиссона и С. Л. Соболева. Автор утверждает, что при помощи данного метода ему удалось доказать гипотезу Адамара о том, что при $n = 3$ принцип Гюйгенса имеет место только, если заданное уравнение указанными выше преобразованиями приводится к волновому. А. Д. Мышкис

4012. **Начальная задача для нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.** Лакс (The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Lax P. D.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 211—229 (англ.)

Обзор (без доказательств) результатов, значительная часть которых получена самим автором, относительно начальной задачи для гиперболической системы, записанной в n-мерном матричном виде

$$U_t + A(x, t, U)U_x + B(x, t, U) = 0,$$

$$U(x, 0) = \Phi(x),\quad -\infty < x < \infty. \qquad (1)$$

Развернутое изложение части результатов содержится в других работах автора (РЖМат, 1954, 4010; 1955, 4422). Помимо этого, отметим следующее. Для системы (1) можно ввести новые искомые функции $v_1, \ldots, v_n$ так, что первые $n-1$ уравнений содержат производные только от $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Если после этого наклон n-й характеристики можно выразить как функцию $x, t, v_1, \ldots, v_{n-1}$, то система называется исключительной. Дается эффективный признак исключительности; в частности, такой оказывается система уравнений одномерного нестационарного неизоэнтропного сжимаемого потока. Для исключительной системы, при помощи априорных оценок решения, удается ввести понятие обобщенного решения в случае, когда от $v_1(x, 0) \ldots, v_{n-1}(x, 0)$ требуется условие Липшица, а от $v_n(x, 0)$ — только ограниченность вариации; тогда решение при $t > 0$ обладает такими же свойствами (рассматриваются и другие свойства решений). Сформулирован ряд проблем и гипотез. Библ. 28 назв. Следует добавить работы О. А. Олейник (РЖМат, 1955, 2677, 3768). А. Д. Мышкис

4013. **Смешанная краевая задача и задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений.** Краснов М. Л., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 6, 789—792

Рассматривается гиперболическое дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,\ t)u = h(x,\ t), \qquad (1)$$

вырождающееся при $t=0$. Предполагается, что $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant c^2 t^\alpha \sum \xi_i^2$, где $c^2>0$ не зависит от t. При $0<\alpha<2$ и некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты уравнения доказывается существование и единственность решения смешанной задачи. При $\alpha>2$ и аналогичных условиях доказывается существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи.

Для уравнения (1), а также для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x,t)u = h(x,t) \qquad (2)$$

доказывается существование и единственность задачи Коши.

Исследуются дифференциальные свойства решений смешанной задачи и задачи Коши для уравнений (1) и (2). Ф. А. Березин

4014. **Задачи с начальными условиями (задачи Коши) для дифференциальных уравнений с частными производными, обладающих особенностями.** Хельвиг (Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten. Hellwig Günter), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 2, 395—418 (нем.)

Для уравнения гиперболического типа

$$Lu \equiv (Au_x)_x + (Bu_x)_y + (Bu_y)_x - (Cu_y)_y + (Pu)_x + (Qu)_y - Du = F. \qquad (1)$$

в прямоугольнике $R\ (0 \leqslant x \leqslant r,\ s_0 \leqslant y \leqslant s_1)$ рассматриваются следующие задачи с начальными условиями на отрезке $k\ (s_0 \leqslant y \leqslant s_1)$ оси $x=0$:

A_1. $\lim\limits_{x\to 0} u(x,\ y) = u_0(y)$; $\lim\limits_{x\to 0} u_y = u_1(y)$.

A_2. Задача A_1 при $u_1(y) \equiv 0$.

A_3. $\lim\limits_{x\to 0} u(x,\ y) = u_0(y)$.

A_4. Задача A_1 при $u_0(y) \equiv 0$.

A_5. Задача A_1 при выполнении условия $f(u_0,\ u_1) = 0$.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) имеют вид:

$$A = x^a A_0(x,\ y);\ B = x^b B_0(x,\ y);\ \ldots\ D = x^d D_0(x,\ y);$$

$$F = x^f F_0(x,\ y),$$

где A_0, B_0, ..., F_0 непрерывно дифференцируемы и $A_0>0$ в $\bar{R}$; A_{0xy}, A_{0yy}, B_{0xy}, ..., C_{0yy}, P_{0xy}, Q_{0yy} непрерывны в R, а действительные числа a, b, ..., f, удовлетворяют неравенствам

I) если $2b > a+c$, то $c-a>-2$; $p-a>-1$; $2q-a-c>-2$;

II) если $2b<a+c$, то $b-a>-1$; $p-a>-1$; $q-b>-1$;

III) если $2b=a+c$, (2)

$b \geqslant 0$; $c>-1$; $p \geqslant 0$; $q>-1$; $d>-1$; $f>-1$; $d-a>-2$; $f-a>-2$; причем в случае I) еще $C_0>0$; в II): $B_0 \neq 0$ и в III): $\sqrt{A_0C_0+B_0^2}>0$ в $\bar{R}$, $u_0(y)$ и $u_1(y)$ трижды непрерывно дифференцируемы.

Полагая

$$U(x,\ y) = \begin{cases} u(x,\ y) - xu_1(y) - u_0(y) & \text{при } A_1 \text{ и } A_5, \\ u(x,\ y) - u_0(y) & \text{при } A_2 \text{ и } A_3, \\ u(x,\ y) - xu_1(y) & \text{при } A_4, \end{cases}$$

автор находит для $U(x,\ y)$ уравнение

$$LU = G(x,\ y) \quad (G(x,\ y) = x^g G_0(x,\ y)) \qquad (3)$$

и однородные начальные условия для U в задаче A_3 и для U и U_x в остальных задачах. Интегрированием (3) по области $\Omega(p_0)$, ограниченной отрезком оси $x=0$ и двумя характеристиками: $y=Y(x,\ x_0,\ y_0)$, $y=Z(x,\ x_0,\ y_0)$ разных семейств, выходящими из произвольной точки $P_0(x_0,\ y_0) \in R$, получается уравнение

$$U(x_0,\ y_0) = \frac{1}{2K(x_0,\ y_0)}\left\{\int_0^{x_0} U(x,\ Z)L^-(x,\ Z)\,dx + \int_0^{x_0} U(x,\ Y)L^+(x,\ Y)\,dx + \iint\limits_{\Omega(P_0)} D(x,\ y)U(x,\ y)\,dxdy + H(x,\ y)\right\},$$

где $H(x,\ y) = \iint\limits_{\Omega(P_0)} G(x,\ y)\,dxdy$; $K = \sqrt{AC+B^2}$; $L^\pm = K_x + K_y E^\pm \pm Q \mp PE^\pm$, $E^\pm = (B \pm K)/A$, эквивалентное уравнению (3) и однородным начальным условиям, если

$$\lim_{x\to 0} KU = 0;\ \lim_{x\to 0} PU + AU_x + BU_y = 0. \qquad (5)$$

«Слабым решением» (обобщённым) задач A_1, ..., A_5 называется решение $U(x,\ y)$ уравнения (4) такое, что: 1) U, U_y непрерывны в $\bar{R}$, а U_x — в $R \setminus k$, $U|_k = 0$ в задаче A_3, U непрерывно дифференцируема в $\bar{R}$ и $U|_k = U_x|_k = 0$ в остальных задачах; 2) $|U| \leqslant C_0 x^{g-a+2}$; $|U_x| \leqslant C_1 x^{g-a+1}$; $|U_y| \leqslant C_2 x^{g-a+2}$, где C_0, ..., C_2 — некоторые положительные постоянные; 3) U удовлетворяет условиям (5). Решая уравнение (4) методом последовательных приближений (за нулевое приближение принимается $U(x,\ y) \equiv 0$), автор устанавливает при $g>-1$, $g-a>-2$ и достаточно малых r существование и единственность «слабого решения»: 1) задачи A_1 при $a=0$; 2) задачи A_3 при $a \neq 0$; 3) задачи A_2 при $a \neq 0$ и дополнительных условиях:

в случае I) $c-a>-1$, в случае II) $b-a>0$ } $p-a>0$; $q-a>-1$; $d-a>-1$; $f-a>-1$;

4) задачи A_4 при $a=0$ и дополнительных условиях: $2q-c>-2$, в случае I); $c+g>-2$, в случае II) и III); $2b+g>-2$ (задача A_5 в работе не исследована). Изучаются условия, при которых $U(x,\ y)$ имеет вторые производные и является классическим решением уравнения (3). С помощью изложенной общей теории в конце работы доказывается существование, един-

ственность и корректность: 1) задачи A_2 для уравнения:

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)x^{-1}u_x+\beta(x,y)u_y+\gamma(x,y)u=$$
$$=\mu(x,y) \qquad (6)$$

при $a(0,y)>-1$; 2) задачи A_1 для уравнения (6) при $a(x,y)-x^j a_0(x,y)$ $j>0$ и непрерывных a_{0xy}, β_{yy}, γ_y, μ_y в $\bar{R}$; 3) задачи A_1 для уравнения

$$u_{xx}-x^c u_{yy}+(P_0(x,y)u)_x+(Q_0(x,y)u)_y-$$
$$-D_0(x,y)u=F_0(x,y), \qquad (7)$$

когда $-1<c<2$ и при дополнительном условии $|Q_0(x,y)|<2$, когда $c=2$. И. Л. Кароль

4015. Выражение волновой функции в полупространстве через ее граничные значения. Поритский (Expression of wave functions over a half space in termas of their boundary values. Poritsky H.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 185—197 (англ.)

Рассматривается решение $u(x,y,z,t)$ волнового уравнения

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

в полупространстве $z>0$, выраженное через граничные значения (на границе $z=0$), подобно формуле Кирхгофа для задачи Коши:

$$u(P,t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int[u]\,d\omega+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]Rd\omega\right] \qquad (1)$$

и через граничные значения $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$

$$u(P,t)=-\frac{1}{2\pi}\int\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]\frac{dx'dy'}{R}. \qquad (2)$$

В обоих случаях интегрирование происходит по плоскости $z=0$, $d\omega$ — элемент телесного угла, $[u]$, $[\partial u/\partial t]$, $[\partial u/\partial z]$ — значения соответствующих функций в точке P' с запаздывающим аргументом $t'=t-R/c$, где R — расстояние от P до P'. Формулы (1) и (2) применяются при исследовании осесимметрических (относительно оси z) волновых функций, а также плоских и сферических волн.

Затем рассматривается случай n измерений, при n четном и нечетном. В. Н. Масленникова

4016. Базисное множество полиномиальных решений для уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и Бельтрами. Майлс, Вильямс (A basic set of polynomial solutions for the Euler—Poisson—Darboux and Beltrami equations. Miles E. P., Jr., Williams Ernest), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 6, 401—404 (англ.)

Рассматриваются уравнения

$$E_{ij}:\ \sum_{n=1}^{m}u_{x_n}u_{x_n}+(-1)^i[u_{tt}+jkt^{-1}u_t]=0,\quad i=0,1;$$
$$j=0,1.$$

В предыдущей статье авторов (РЖМат, 1956, 4537) построено базисное множество полиномиальных решений для E_{10} и E_{00}. В реферируемой заметке с помощью некоторого изменения этих полиномов получено базисное множество полиномиальных решений для E_{11} и E_{01}. Для этого используется лемма: если $H_{10}[H_{00}]$ — полиномиальное решение $E_{10}[E_{00}]$, содержащее t в четной степени, тогда полином $\{H_{10}\}[\{H_{00}\}]$, получающийся из $H_{10}[H_{00}]$ заменой t^{2n} через $t^{\{2n\}}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{(1+k)(3+k)\ldots(2n-1+k)}t^{2n}$, есть решение уравнения $E_{11}[E_{01}]$.

Базисное множество полиномов для E_{11}, $k>0$, выписывается в виде

$$\sum\frac{(a_0/2)!}{\prod_{j=0}^{m}a_j!\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{b_j-a_j}{2}\right)!}t^{\{a_0\}}\prod_{j=1}^{m}x_j^{a_j}, \qquad (1)$$

где суммирование распространяется на все неотрицательные a_j такие, что $a_j\equiv b_j \bmod 2$, $j=0,1,\ldots,m$, $\sum_{j=0}^{m}a_j=m$, $a_j\leqslant b_j$, при $j=1,2,\ldots,m$; (b_j) — множество неотрицательных целых чисел таких, что $b_0=0$ и $\sum_{j=0}^{m}b_j=n$.

Затем указывается на связь базисного множества (1) с решением задачи Коши для E_{11}, где начальное условие $u|_{t=0}$ задается в виде полинома от x_i, а $\partial u/\partial t|_{t=0}=0$. В. Н. Масленникова

4017. О регулярной задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Копсон (On a regular Cauchy problem for the Euler—Poisson—Darboux equation. Copson E. T.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A235**, № 1203, 560—572 (англ.)

В пространстве нечетного числа измерений рассматривается задача Коши с начальными данными:

$$u|_{t=t_0}=f(x);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0}=g(x);\quad t\geqslant t_0>0, \qquad (1$$

для волнового уравнения

$$Lu\equiv u_{tt}-\Delta u=0 \qquad (2)$$

и для уравнения

$$L_\nu u\equiv u_{tt}-\Delta u-\nu(\nu-1)t^{-2}u=0\ (\nu=\text{const}), \qquad (3)$$

к которому после замены $u=u^*t^\nu$ приводится известное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу:

$$u^*_{tt}-\Delta u^*+2\nu t^{-1}u^*_t=0.$$

Вместо фундаментального решения уравнения (2):

$$v=\Gamma^{1-m};\ \Gamma=(t-\tau)^2-\sum_{s=1}^{2m-1}(x_s-\xi_s)^2,$$

приводящего к расходящимся интегралам при решении задачи Коши методом Адамара, автор предлагает использовать в формуле Грина функцию $v=\Gamma$ ($L\Gamma=4m$), позволяющую с помощью теории интегралов нецелого порядка Рисса (Riesz M., Acta math., 1949, 81, 1—223) получить после несложных выкладок явный вид решения задачи (2)—(1). В частности:

$$u(x,t)=\frac{2^{1-2m}}{\pi^{m-1}(m-1)!}L^{m-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_V f(\xi)\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_V g(\xi)\,d\xi\right],$$

где V — часть гиперплоскости $t=t_0$, вырезаемая характеристическим конусом $\Gamma=0$, а функции g и здесь и ниже имеют непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно.

Решение задачи (1) для уравнения (3) автор находит аналогичным образом, используя в формуле Грина функцию

$$v = R(x, t, \xi, \tau) = \tau^{1-m} K(\Gamma/4t\tau), \qquad (4)$$

где $K(\theta) = [1 - F(m-\nu, m+\nu-1, m, -\theta)]/(m-\nu)\times$ $\times(m+\nu-1)$, $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. Решение задачи (3)—(1) тогда имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{2^{1-2m} t^{m+1}}{\pi^{m-1}(m-1)!} L^m \left[\int_V g(\xi) R_0 d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_V f(\xi) \frac{\partial R_0}{\partial t_0} d\xi \right], \qquad (5)$$

где $R_0 = R(x, t, \xi, t_0)$. В случае $f(\xi) = 0$ решение (5) можно записать еще в другой форме, из которой легко заметить, что принцип Гюйгенса для уравнения (3) имеет место тогда и только тогда, когда $\nu = m-1, m-2, \ldots, 2, 1, 0, -1, -(m-2)$. Приведены частные случаи решения (5) для $m = 1$, $m = 2$.

И. Л. Кароль

4018. Замечание о гиперболической системе уравнений с частными производными второго порядка. Шефер (Eine Bemerkung über hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Schaefer Helmut), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 2, 39—42 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$\partial^2 u/\partial x \partial y = f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y),$$

где $f(x, y, z, u, v)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывные первые производные по всем своим аргументам в некоторой ограниченной области: $|x|$, $|y| < d$, $|z|$, $|u|$, $|v| < M$.

Показано, что непрерывное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = u(0, y) = 0,$$

обладает непрерывными частными производными $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$ для $|x|$, $|y| < d_1 < d$. Эти производные могут быть получены процессом последовательных приближений, равномерно сходящимся при любых $|x|$, $|y| \leqslant d_2 < d_1$.

Указано, что результат остается в силе и для системы уравнений вида

$$\partial^2 u_i/\partial x \partial y = f_i(x, y, u_j, \partial u_j/\partial x, \partial u_j/\partial y) \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Г. Л. Мизернюк

4019. О фундаментальном решении уравнения с частными производными параболического типа. Кржижанский (Sur la solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique. Krzyżański Miroslaw), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 89—97 (франц.)

Строится фундаментальное решение уравнения

$$a(x, y) u''_{xx} = u'_y + b(x, y) u'_x + c(x, y) u, \qquad (1)$$

где $a(x, y)$ — функция, ограниченная и непрерывная в области R: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < Y = \text{const}$ вместе с a'_x, a'_y и такая, что в R $a(x, y) > \text{const} > 0$, а $b(x, y)$ и $c(x, y)$ допускают в R непрерывные первые производные. Заменой переменных (1) сводится к уравнению

$$\bar{u}''_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{u}'_{\bar{y}} + \bar{c}(\bar{x}, y) \bar{u}, \qquad (2)$$

для которого Адамаром (Hadamard, C. r. Acad. sci 1911, 152, 1148—1149) было найдено фундаментальное решение $\bar{u}(\bar{x}, y, \bar{\xi}, \eta)$.

Это позволяет получить решение $U(x, y, \xi, \eta)$ уравнения (1), которое удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{y-\eta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y; \xi, \eta)\, d\xi = 1, \quad \lim_{y-\eta\to 0} \int_{|z-\xi|>\delta} U(x, y;$$

$$\xi, \eta)\, d\xi = 0,$$

где $\delta > 0$ — любое число (эта формула и формула (17) в тексте содержат опечатки)

$$\lim_{y-\eta\to 0} \frac{1}{y-\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi) U(x, y; \xi, \eta)\, d\xi = b(x, y),$$

$$\lim_{y-\eta\to 0} \frac{1}{y-\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^2 U(x, y; \xi, \eta)\, d\xi = 2a(x, y).$$

Если $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $-\infty < x < \infty$, то интеграл $I(x, y; \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y; \xi, \eta) \times$ $\times \varphi(\xi)\, d\xi$ дает решение уравнения (1) для $0 < \eta < y < Y$, $-\infty < x < \infty$, причем $\lim_{y\to\eta} I(x, y; \eta) = \varphi(x)$.

Феллером (Feller, Math. Ann., 1936, 113, 113—160) раньше было получено фундаментальное решение уравнения (1), но он искал решение в виде ряда по некоторым функциям, находимым из сложных рекуррентных соотношений.

Г. Л. Мизернюк

4020. Линейные уравнения параболического типа с постоянными коэффициентами. Розенблум (Linear equations of parabolic type with constant coefficients. Rosenbloom P. C.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 191—200 (англ.)

Рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u \quad (t > 0, |x| < \infty), \qquad (1)$$

где $L(\xi)$ — многочлен степени $m = 2k$ с постоянными комплексными коэффициентами, для главной части $q(\xi)$ которого форма $\mathrm{Re}(-1)^{k-1} q(\xi)$ при вещественных ξ положительно определена. Формальным решением начальной задачи $u(x, 0) = \varphi(x)$ для уравнения (1) служит $u(x, t) = \int \varphi(y) K(x-y, t)\, dV_y = T_t\varphi$ (2), где $K(x, t) = (2\pi)^{-n} \int \exp[i(\xi \cdot x) + tL(i\xi)]\, dV_\xi$.

Изучаются свойства представления (2) на основе оценок ядра K, полученных О. А. Ладыженской (Матем. сб., 1950, 27 (69), № 2, 175—184) и несколько уточненных автором. Именно, если

$$\int |\varphi(x)| \exp\left(-M \|z\|^{m/(m-1)}\right) dV_x \leqslant N < \infty, \qquad (3)$$

то $u = T_t\varphi$ в некоторой полосе $0 < t < c$ (ширина которой указывается) существует, удовлетворяет оценке аналогичного вида и уравнению (1), причем $\lim_{t\to+0} u(x, t) = \varphi(x)$ во всех лебеговых точках φ, $\lim_{(\xi, t)\to(x+0)} u(\xi, t) = \varphi(x)$ во всех точках непрерывности φ. В случае уравнения теплопроводности $\left(L(\xi) = \sum \xi_k^2\right)$ свойства предельного перехода при $t \to +0$ выясняются более точно; так, для $n = 1$ указывается предел по касательным путям, имеющим

в $(x, 0)$ определенную кривизну. Если решение u удовлетворяет при $0<t<c$ оценке (3) и непрерывно при $0\leqslant t<c$, то оно представимо в виде (2) через $\varphi(x)=u(x, 0)$; отсюда, в частности, вытекает теорема о единственности, несколько уточняющая результат О. А. Ладыженской. Для простейшего уравнения $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$ приводится теорема, дающая условия (близкие к необходимым и достаточным) на функцию $H(x)$ $(0\leqslant x<\infty)$, чтобы из $\int |u(x, t)|\exp[-H(|x|)]\times dx\leqslant M$ $(0<t<c)$, $\lim_{t\to+0} u(x, t)=0$ следовало $u\equiv 0$ (отметим, что в формулировке этой теоремы вместо k должно быть R, а вместо (c) $u\equiv 0$ должно быть (c) $u\not\equiv 0$). Далее приводятся некоторые результаты аналогичного типа о неоднородном уравнении (1) и о поведении при $t\to+\infty$ решений уравнения $\partial u/\partial t-L(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)u+su=f(x)$. Доказательства отсутствуют. А. Д. Мышкис

4021. Параболические уравнения. Лакс, Милграм (Parabolic equations. Lax P. D., Milgram A. N.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 167—190 (англ.)

Рассматривается смешанная задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-Lu\equiv(-1)^{p+1}\sum_{\nu=0}^{2p}\sum_{i_1,\ldots,i_\nu=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_\nu}(x)\times\times\frac{\partial^\nu u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\nu}}$$

с коэффициентами, p раз непрерывно дифференцируемыми в конечной области G, на границе которой ставятся нулевые граничные условия простейшего типа. От оператора L требуется эллиптичность и условия полуограниченности $(Lu, u)_0\geqslant h\|u\|_p^2$, $(Lu, v)_0\leqslant\leqslant c\|u\|_p\|v\|_p$ для $2p$ раз непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в контурной полоске (здесь $(,)_0$ — скалярное произведение в $L_2(G)$, а $\|\ \|_p$ — норма в $W_2^{(p)}(G)$); по поводу выполнения этих условий см. работу Гординга (Gårding L., C. r. Acad. sci., 1951, 233, 1554—1556). Обобщенное решение начальной задачи получается при помощи применения теоремы Хилле—Иосида (Yosida K., J. Math. Soc. Japan., 1948, 1, 15—21) о решении начальной задачи для уравнений вида $dx(t)/dt=Ax(t)$ к оператору $A=-\widetilde{L}$, где $\widetilde{L}$ — соответственно выбранное расширение оператора L. Это расширение обобщает расширение Фридрихса (Friedrichs K., Math. Ann., 1934, 109, 465—486, 685—713) на случай несимметричных операторов и осуществляется следующим образом. Пусть L — неограниченный оператор, определенный на всюду плотном линеале D_0 гильбертова пространства H_0, причем

$$(Lx, x)_0\geqslant K(x, x)_0,\quad (Lx, y)_0\leqslant c(Lx, x)_0^{1/2}(Ly, y)_0^{1/2}.$$

Тогда D_0 по норме $\|x\|=(Lx, x)_0^{1/2}$ пополняется до гильбертова пространства $H\subset H_0$, после чего $(Lx, y)_0$ расширяется с D_0 до билинейного функционала $B(x, y)$ на H и линейное преобразование $\widetilde{L}$ с областью определения D определяется требованием $B(x, y)=(Ex, y)_0$ (для всех $y\in H$, $x\in D$). Рассматривается также метод эффективного подсчета этого расширения $\widetilde{L}$.

При соответствующих требованиях гладкости коэффициентов $a(x)$ доказывается, что обобщенное решение является классическим, а при достаточной гладкости начальной функции — и начальное условие удовлетворяется в классическом смысле. Это делается при помощи теоремы Фридрихса (РЖМат, 1955, 1234) на основе интегрального представления полугруппы линейных операторов, порождаемых оператором A.

Следует отметить, что аналогичные результаты и методы содержатся в работе В. Э. Лянце (РЖМат, 1956, 7372). А. Д. Мышкис

4022. Некоторые краевые задачи для систем дифференциальных уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами в полупространстве. Загорский Т. Я., Докл. Львовск. политехн. ин-та, 1955, 1, № 2, 3—8

Рассматривается параболическая система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}=L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U, \qquad (1$$

где U — матрица-столбец высоты N, $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная операторная матрица ширины N с элементами

$$L_{lj}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k_1+\ldots+k_n=s} a_{lj}^{k_1\ldots k_n}\frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

($a_{lj}^{k_1\ldots k_n}$ — постоянные числа). Краевые условия задачи записываются в виде равенства

$$\lim_{x_n\to 0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U=f(x', t),$$
$$(x')=(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \qquad (2$$

где B — операторная матрица ширины N и высоты $\frac{sN}{2}$, элементами которой являются операторы

$$B_{lj}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k_1+\ldots+k_n=sl} b_{lj}^{k_1\ldots k_n}\frac{\partial^s e}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

(b_{lj} — постоянные числа), а $f(x', t)$ — заданная матрица-столбец высоты $\frac{sN}{2}$.

При некоторых предположениях относительно матриц B и $f(x', t)$ доказывается разрешимость краевой задачи (1), (2) для полупространства $x_n>0$.

Именно, строится «функция Грина» $G(x, \xi', t, \tau)=G(x_1-\xi_1, \ldots, x_{n-1}-\xi_{n-1}, x_n, t-\tau)$, с помощью которой решение U представляется истокообразно:

$$U(x, t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi', t, \tau)f(\xi', \tau)\,d\xi',$$
$$(\xi')=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Для построения функции $G(x_1-\xi_1, \ldots, x_{n-1}-\xi_{n-1}, x_n, t-\tau)$ применяется преобразование Фурье по первым $n-1$ ее аргументам и преобразование Лапласа по последнему аргументу. Так полученная трансформация $\widetilde{G}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x_n, p)$ представляется контурным интегралом

$$\widetilde{G}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x_n, p)=\int_{C+} l^{i\alpha_n x_n}K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, p)\,d\alpha$$

в комплексной плоскости (α_n). Функция $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, p)$ определяется с помощью трансформированного условия (2). О. В. Гусева

4023. О единственности решения задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения. А г а е в Г. Н., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1955, 7, 19—32 (рез. азерб.)

Доказывается единственность решения задачи Коши для квазилинейного дифференциального уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{\sum k_s = 2p} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \\ + F(t, \bar{x}, U, \ldots),$$

где F — вообще нелинейная функция t, $\bar{x}$, U и производных U по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порядка $\leqslant 2p-1$.

С помощью леммы Адамара (Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., ГИТТЛ, 1952, стр. 81) задача сводится к доказательству единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. С.А. Самедова

4024. Об одной краевой задаче распределения тепла. Б а р а т т а (Sopra un problema di ripartizione del calore. B a r a t t a M a r i a A n t o n i e t t a), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, 197—207 (итал.)

Решается задача о распределении тепла в однородном бесконечном круговом цилиндре и в области между двумя коаксиальными бесконечными круговыми цилиндрами, в предположении, что через боковую поверхность происходит теплообмен с окружающей средой по линейному закону (закону Ньютона). Решение строится с помощью метода Эйлера—Фурье в виде рядов по цилиндрическим функциям. Для удовлетворения неоднородным краевым условиям дополнительно используется интеграл Дюамеля. Исследование сходимости полученных рядов отсутствует. С. Д. Эйдельман

4025. Поток теплоты в полупространстве. Р и д (Heat flow in a half space. R e i d W a l t e r P.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 206—208 (англ.)

Исследование потока теплоты от плоскости $x=0$ в полупространство $x>0$ через тонкую пластину (со столь большой теплопроводностью, что температура в ней зависит только от времени) приводит к решению уравнения теплопроводности при более сложном граничном условии, чем обычно, а именно, в граничном условии встречаются частные производные по x до третьего порядка.

В работе получено формальное решение этой задачи посредством преобразования Лапласа по t и синус-преобразования Фурье по x. Подобная задача более глубоко исследована А. Н. Тихоновым (Матем. сб., 1950, 26 (68), № 1, 35—56). Э. Я. Риекстыньш

4026. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа. С м и р н о в М. М., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 5, 699—701

Для уравнения смешанного типа

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \operatorname{sgn} y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \qquad (1)$$

в области D, ограниченной прямыми $A(0, 0)$ $C(1/2, -1/2)$, $CB(1, 0)$ и гладкой жордановой дугой σ с концами в точках A и B и лежашей в полуплоскости $y>0$, изучается следующая задача: Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением (1) в области D при $y \neq 0$; 2) u и ее первые производные непрерывны в $\bar{D}$; 3) вторые и третьи производные $u(x, y)$ непрерывны внутри D, причем вблизи точек A и B для вторых производных допускается особенность порядка ниже единицы, а для третьих производных ниже 2; 4) на σ функция $u(x, y)$ и ее нормальная производная, а на AC и CB лишь ее нормальная производная принимают заданные, достаточно гладкие значения.

Существование и единственность решения автор доказывает в том случае, когда полная граница эллиптической части смешанной области D имеет дважды непрерывно дифференцируемую касательную. А. В. Бицадзе

4027. Дифференциальные уравнения смешанного типа. Дин Ся-си (混合型微分方程. 丁夏畦), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 2, 193—204 (кит.; рез. англ.)

Для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

решена следующая задача: В смешанной области D, ограниченной прямыми $D(1/2, -1/2)$, $E(-1/2, 1/2)$, $DB(1, 0)$, $EC(0, 1)$ и гладкой дугой Жордана σ, соединяющей точки B и C и лежащей в первом координатном углу, ищется функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(x, y)$ является решением (1) в области D при $y \neq 0$, $x \neq 0$; 2) она непрерывна в $\bar{D}$; 3) в $\bar{D}$ непрерывны u_x и u_y всюду, кроме, быть может, точек $A(0, 0)$, B и C, вблизи которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 4) на DE и σ функция $u(x, y)$ принимает заданные гладкие значения.

Рассматривается также ряд задач для уравнения

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

в области его гиперболичности. А. В. Бицадзе

4028. Краевые задачи для уравнений смешанного типа. А г м о н (Boundary value problems for equations of mixed type. A g m o n S.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, 1954, Roma, 1955, 54—68 (англ.)

Для уравнения

$$zu_{xx} + u_{zz} + a(x, z)u = b(x, z) \qquad (1)$$

в области D, ограниченной в полуплоскости $z>0$ гладкой кривой L, опирающейся на отрезок AB $[-1, 1]$ оси $z=0$, и в полуплоскости $z<0$ характеристиками Γ_A и Γ_B, выходящими из точек A и B, рассматриваются:

а) краевая задача Трикоми (задача I) с краевыми условиями:

$$u|_L = g, \quad u|_{\Gamma_B} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad (2)$$

б) задача II: найти непрерывное в $\bar{D}$ решение (1) по заданной его нормальной производной на $L + \Gamma_B$.

В § 2 устанавливается теорема: Если 1) кривая L перпендикулярна к оси $z=0$ в точках A и B; 2) существует $f'(x)$, удовлетворяющая условию Гёльдера на $[0, 1]$, то существует «сильное» (дважды непрерывно дифференцируемое в D) решение задачи I для уравнения

$$zu_{xx} + u_{zz} = 0. \qquad (3)$$

Используя фундаментальное решение $H_k(CM)$ уравнения (3), полученное Жерменом и Баде (РЖМат, 1955, 5042), автор ищет решение задачи в виде:

$$u(C)=\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\int_{\Lambda}\mu(\sigma)\,y^{1/3}\frac{\partial}{\partial n_M}H_{-\sqrt{3}}(C,\ M)\,d\sigma_M+$$

$$+2\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\int_{\Gamma_B}(1-x)^{1/3}\left[\varphi'(x)-\frac{\varphi(x)}{6(1-x)}\right]\times$$

$$\times H_{-\sqrt{3}}(C,\ M)\,dx_M=v_\mu(C)+w_\varphi(C). \qquad (4)$$

Здесь $y=2z^{3/2}/3$; Λ — образ L в плоскости $(x,\ y)$; σ — длина дуги вдоль Λ; n_M — направление внешней нормали к Λ в точке M. Для неизвестных плотностей «потенциала двойного слоя» v_μ и «потенциала простого слоя» w_φ, из краевых условий (2) получается система:

$$\begin{aligned}&0{,}5\mu(\sigma)+T_{\sigma\sigma}\mu+T_{\sigma x}\varphi=g(\sigma),\\&0{,}5\varphi(x)+T_{x\sigma}\varphi+T_{xx}\varphi=f(x);\end{aligned} \qquad (5)$$

где $T_{\sigma\sigma}$, ..., $T_{x\sigma}$ — некоторые линейные операторы. Найдя $S_{xx}=(0{,}5I+T_{xx})^{-1}$ — резольвенту сингулярного интегрального уравнения и исключая φ из системы (5), автор получает окончательно

$$0{,}5\mu(\sigma)+T_{\sigma\sigma}\mu-T^0_{\sigma\sigma}\mu=g(\sigma)-T_{\sigma x}S_{xx}f, \qquad (6)$$

где $T^0_{\sigma\sigma}=T_{\sigma x}S_{xx}T_{x\sigma}$; $T_{\sigma\sigma}$ — вполне непрерывный оператор. При решении уравнения (6) рассматривается предварительно вспомогательная краевая задача: В области D_ε, ограниченной характеристиками $\Gamma_{A\varepsilon}$ и $\Gamma_{B\varepsilon}$, выходящими из точек $A_\varepsilon(-1+\varepsilon,\ 0)$ и $B_\varepsilon(1-\varepsilon,\ 0)$ кривой L, и отрезками AA_ε и BB_ε оси $z=0$, найти решение u_ε уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_\varepsilon|_L=g;\ \ u_\varepsilon|_{\Gamma_{B\varepsilon}}=f(x+\varepsilon)=f_\varepsilon(x);$$

$$0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon;\ \ u_\varepsilon|_{AA_\varepsilon}=u_\varepsilon|_{BB_\varepsilon}=0.$$

Как и выше, эта задача приводится к уравнению

$$0{,}5\mu_\varepsilon(\sigma)+T_{\sigma\sigma}\mu_\varepsilon-T^\varepsilon_{\sigma\sigma}\mu_\varepsilon=g(\sigma)-T^\varepsilon_{\sigma x}S^\varepsilon_{xx}f_\varepsilon, \qquad (7)$$

где $T^\varepsilon_{\sigma\sigma}$ уже является вполне непрерывным оператором. Найдя отсюда μ_ε (однородные уравнения (6) и (7) имеют лишь нулевые решения в силу единственности решения задачи Трикоми для уравнения (3)), автор утверждает, что при $\varepsilon\to 0$, $\mu_\varepsilon\to\mu$ — к решению уравнения (6). Аналогичным образом, решение задачи II ищется в виде суммы потенциалов простого слоя вдоль L и Γ_B.

В § 3 при решении задачи I для уравнения (1) сначала в банаховом пространстве $C\overline{D}$ непрерывных в $\overline{D}$ функций f вводится линейный оператор T. $Tf=u(C)$ есть решение (обобщенное в некотором смысле) уравнения $zu_{xx}+u_{zz}=f(x,\ z)$, исчезающее на $L+\Gamma_B$. Доказывается полная непрерывность оператора T. Далее, обычным путем, задача I для уравнения (1) приводится к уравнению

$$u(x,\ z)+Tau=v(x,\ z)+Tb, \qquad (8)$$

где $v(x,\ z)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям (2), и, таким образом, решение задачи сводится к альтернативе Фредгольма. Однородное уравнение (8) имеет лишь нулевое решение, если единственно решение задачи I для однородного уравнения (1). Полученное решение будет «сильным», если a и b удовлетворяют условию Гёльдера в $\overline{D}^+$ $(z>0)$ и имеют непрерывные вторые производные в $\overline{D}^-$ $(z<0)$, а f и g удовлетворяют условиям теоремы 1. В работе имеются опечатки. Доказательства лишь намечены.

И. Л. Кароль

4029. К вопросу о решении смешанной системы дифференциальных уравнений. Авдеев Н. Я., Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 59—70

Под смешанной системой автор понимает систему двух уравнений, одно из которых является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, вида

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0, \qquad (1)$$

а второе — уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+E\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,\ y). \qquad (2)$$

Интеграл $u(x,\ y)=c$ уравнения (1), для которого $u(x,\ y)$ удовлетворяет (2), называется решением системы (1), (2). Выводятся необходимые (в случае, если левая часть (1) есть полный дифференциал) и достаточные условия существования совместного решения уравнений (1) и (2) в случае $f(x,\ y)=0$.

В случае неоднородного уравнения (2) также исследуется вопрос, когда (1) и (2) имеют совместное решение. Приводятся примеры. В. Н. Масленникова

4030. О двух уравнениях в частных производных специального вида. Перчинкова-В'чкова (Sur deux équations aux dérivées partielles ayant une structure intéressante. Perčinkova-V'čkova Danica a), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 1, 3—4 (франц.)

Приводятся без доказательства решения двух специального вида дифференциальных уравнений, записанных в виде детерминантов $(n+1)$-го порядка. В. Н. Масленникова

4031. Метод ортогональной проекции и две первые краевые задачи теории упругости. Телеман (Metoda proiesției ortogonale și primele două probleme la limită din teoria elasticității. Teleman Silviu), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1955, 7, № 1, 105—125 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются две первые краевые задачи статической теории упругости в трехмерном пространстве при отсутствии объемных сил. Среда предполагается однородной и изотропной. Для векторных полей и тензорных полей второго порядка вводятся дифференциальные операции G, R и D, аналогичные операциям grad, rot и div для скалярных и векторных полей. Тогда уравнение теории упругости может быть записано в виде $DG\bar{u}=0$. Рассматривается гильбертово пространство H симметричных тензоров $\mathbf{f}$, составляющие которых суммируемы с квадратом. При этом метрика определяется интегралом энергии, записанным через составляющие тензора деформации. Через Γ_i обозначается класс функций, имеющих производные порядка i и обращающихся в нуль в погра-

ничной полоске, через $\overline{\Gamma}_i$ и Γ_i — классы векторов и тензоров с составляющими из Γ_i. Вводятся подпространства

$$H_G^0 = \overline{G(\overline{\Gamma}_1)}, \quad H_R^0 = \overline{R(\overline{\Gamma}_2)}, \quad H_G = H \ominus H_R^0,$$

$$H_R = H \ominus H_G^0, \quad H_\Delta = H_G \cap H_R.$$

Доказывается, что тензоры $\mathbf{f} \in H_\Delta$ имеют аналитические составляющие и каждый из них представим в виде $\mathbf{f} = G\bar{u}$, причем $DG\bar{u} = 0$. Доказывается, что имеют место ортогональные разложения

$$H_G = H_G^0 \oplus H_\Delta, \tag{1}$$

$$H_R = H_R^0 \oplus H_\Delta. \tag{2}$$

Разложение (1) решает первую краевую задачу, разложение (2) — вторую. Краевые условия выполняются в некотором обобщенном смысле. В конце работы рассматривается задача об отыскании решения с заданными периодами. Аналогичная задача теории потенциала была рассмотрена Вейлем (Weyl H., Duke Math. J. 1940, 7, 411—444). Д. М. Эйдус

4032 К. Решение общей краевой задачи для одномерных затухающих волн при гармоническом законе изменения во времени. Боркман, Оберлендер (Lösung des allgemeinen Randwertproblems für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz. Borkmann Karl, Oberländer Siegfried. Berlin, Akademie-Verlag, 1955, S. 1—99) (нем.)

Ставится задача об интегрировании уравнения

$$\partial^2 u/\partial x^2 - A\partial^2 u/\partial t^2 = D\partial u/\partial t,$$

где A и D — постоянные, причем $A \geqslant 0$. Начальные условия не ставятся и заменяются требованием, чтобы решение имело вид

$$u(x, t) = C(x)\cos\omega t + S(x)\sin\omega t;$$

частота ω считается данной. Неизвестные $C(x)$ и $S(x)$ подчинены краевым условиям

$$a_i u(x_i) + b_i (\partial u/\partial x_i)_{x=x_i} = c_i \cos\omega t + s_i \sin\omega t,$$

$$i = 1, 2;$$

здесь x_1 и x_2 — заданные значения x; a_i, b_i, c_i, s_i — также заданные постоянные.

Искомые функции $C(x)$ и $S(x)$ просто выражаются через четыре функции $F_i(\alpha, \beta)$:

$$F_1 = \operatorname{ch} k\alpha \cos\alpha, \quad F_3 = \operatorname{sh} k\alpha \cos\alpha,$$

$$F_2 = \operatorname{sh} k\alpha \sin\alpha, \quad F_4 = \operatorname{ch} k\alpha \sin\alpha,$$

где

$$\alpha = \nu x, \quad k = \operatorname{tg}\beta/2, \quad \beta = \operatorname{arc\,ctg} A\omega/D,$$

$$\nu^2 = D\,\omega/2\operatorname{ctg}(\beta/2)$$

Основной целью авторов было табулирование функций $F_i(\alpha, \beta)$ и некоторых других связанных с ними функций. Таблицы занимают более половины всей книги (стр. 40—95). Значения α в таблицах даны через 0,1 от 0,0 до 4,0; значения β — через 10° от 0° до 90°. Значения функций даны с 5 знаками после запятой. С. Г. Михлин

4033 Д. О регулярной задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Дейвис (On a regular Cauchy problem for the Euler—Poisson—Darboux equation. Davis Ruth M.—Doct. diss. Univ. Maryland, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2224 (англ.)

Изучается n-мерное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$L_x[u] = u_{x_0 x_0} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} + \frac{k}{x_0} u_{x_0} = 0, \quad k = \text{const} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$u_{x_0}(t_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0. \tag{2}$$

Применяется известный метод М. Рисса, требующий построения функции $V^{-\alpha}(x; y)$, зависящей от параметра α, которая обращается вместе со своими первыми производными в нуль на характеристическом конусе с вершиной $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ и для которой выполняется соотношение

$$M_y[V^{\alpha+2}(x; y)] = V^\alpha(x; y) = L_x[V^{\alpha+2}(x; y)],$$

где M — оператор, сопряженный с L.

Функция $V^\alpha(x; y)$ используется затем в тождестве Грина, из которого предельным переходом при $\alpha \to 0$ получается искомое решение задачи (1), (2).

М. Б. Капилевич

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4034. О поле импульсов неголономных консервативных систем типа *(n, n—2)*. Аржаных И. С., УзССР фанлар акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1956, № 5, 3—6 (рез. узб.)

Предлагается новый метод интегрирования для неголономных консервативных систем с кинетическим потенциалом

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\nu_1, \nu_2}^{1, n} a_{\nu_1, \nu_2}\dot{q}_{\nu_1}\dot{q}_{\nu_2} + \sum_{\nu}^{1, n} a_\nu \dot{q}_\nu + U, \tag{1}$$

подчиненных $m = n - 2$ связям

$$\sum_{\nu}^{1, n} A_{\mu\nu}\dot{q}_\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{2}$$

с помощью метода поля импульсов.

Используя результаты своих работ, автор получает соотношения для импульсов $p_\nu = \partial L/\partial\dot{q}_\nu$

$$\sum_{\nu}^{1, n} A_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} = 0, \tag{3}$$

интеграл энергии

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = h \tag{4}$$

и уравнение

$$\Omega = 0, \tag{5}$$

где $H = -L + \sum_\nu P_\nu\dot{q}_\nu$, $\dot{q}_\nu = \partial H/\partial p_\nu$, Ω линейно зависит от составляющих тензора вихрей импульсов.

Из уравнений (3), (4) и (5) определяется поле

$$p_\nu = p_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{6}$$

Предлагается такой порядок решения построенной системы: из (3) определяются $n-2$ импульса через p_{n-1} и p_n; из (4) p_{n-1} выражается через p_n, затем все $n-1$ импульсов выражаются через p_n; из (5) получается линейное уравнение в частных производных для p_n, общий интеграл которого имеет вид

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \qquad (7)$$

где φ_ν зависят от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и p_n. Интеграл (7) содержит 2 постоянных, из которых одна h. Поэтому достаточно найти лишь две функции φ_1 и φ_2 и связать их равенством $\varphi_2 = C\varphi_1$, $c = \text{const}$, $\varphi_k = \varphi_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_n, h)$, $k = 1$ или $k = 2$:

Для систем, не зависящих явно от некоторых координат, определяется поле импульсов, не зависящее от этих координат.

В качестве примера рассмотрена система с кинетическим потенциалом

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi)$$

и связью

$$\dot{y} = \dot{x}\,\operatorname{tg}\varphi,$$

для которой проведено решение, и для случая $U = 0$ получен хорошо известный результат.

А. К. Никитин

4035. **Некоторые оценки качества регулирования по частотным характеристикам. Блох З. Ш.,** Автоматика и телемеханика, 1955, 16, № 3, 258—268

Рассматриваются оценки переходного процесса $\varphi(t)$ по частотным характеристикам $R(\omega)$ (действительной) и $I(\omega)$ (мнимой) замкнутой линейной системы автоматического регулирования. Выведены некоторые необходимые признаки монотонности, например $|I(\omega)| \leqslant \varphi_y$, где φ_y — установившееся значение ординаты процесса $\varphi(t)$. Установлены также необходимые признаки монотонности для амплитудной частотной характеристики $M(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$. Даны оценки перегруппирования сверху и снизу.

Приведены также оценки времени регулирования и оценки влияния отбрасываемых участков частотных характеристик на переходный процесс.

А. А. Фельдбаум

4036. **Устойчивость переходных явлений в нелинейных системах, особенно с точки зрения электромеханических процессов в синхронных машинах. Геллер** (Stabilita přechodných jevů v hellneárnich systémech se zvláštnim zřetelem na elektromechanické pochody v synchronnich strojich. Heller Bedřich), Rozpr. Českosl., akad. věd Hada TV, 1955, 65, № 3, 1—19 (чеш.; рез. русск., нем.)

Исследуется с точки зрения устойчивости дифференциальное уравнение

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + f(y) = P, \qquad (1)$$

где a, b, P — постоянные. Под устойчивой понимается такая физическая система, в которой при внезапном изменении параметра зависимая переменная величина по окончании переходного состояния устанавливается опять на новом равновесном значении. Устойчивость исследуется в фазовой плоскости $(y, dy/dt)$ таким образом, что первоначальное уравнение преобразуется подстановкой $dy/dt = s$ к уравнению $as\frac{ds}{dy} + bs + f(y) = P$.

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2}a(s^2 - s_0^2) + B\int_{y_0}^{y} s\,dy + \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy = P(y - y_0). \qquad (2)$$

Без доказательства приводится утверждение, что система является устойчивой в том случае, если затухание достаточно велико. В случае устойчивой системы автор заменяет неизвестную функцию $s(y)$ функцией $s = a_1(y - y_0) + b_1\sqrt{y - y_0}$. Постоянные a_1, b_1 определены условием, что коэффициенты касательных к первоначальной и к заменяющей ее кривой в двух точках равны. Оценка ошибки не проводится.

Затем достигнутые результаты применяются при исследовании электромеханических колебаний синхронных машин.

Основным является уравнение $K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + N_a\frac{d\vartheta}{dt} + W\sin\vartheta = P_m$, где ϑ — угол между вектором напряжения на зажимах и вектором внутреннего напряжения, $Kd^2\vartheta/dt^2$ — мощность инерционных масс, $N_a d\vartheta/dt$ — асинхронная мощность затухания, $W\sin\vartheta$ — электрически переданная мощность, P_m — механическая мощность на сцеплении (сжатии).

Сначала приводится метод, по которому можно установить, каким образом протекают с течением времени уравновешивающие явления машины, включенной параллельно в большую сеть при внезапном изменении отношения электрической мощности к механической мощности, получаемой машиной извне.

Для простоты пренебрегают затуханием. Изменение угла ϑ во времени можно получить интегрированием приближенной формулы для s: $s = a_1(\vartheta - \vartheta_0) + b_1\sqrt{\vartheta - \vartheta_0'}$.

Далее решается проблема синхронизации нагруженной синхронной машины во время приведения ее в движение. При этом предполагается, что в возбуждающей цепи сразу после включения получается установившееся значение тока и что включение производится в тот момент, когда $\vartheta = 0$, т. е. в самом благоприятном случае. Кроме того, выводится приближенная формула для наибольшего скольжения, при котором машина еще не выходит из синхронного движения.

Некоторые утверждения автор математически не обосновывает, ссылаясь на физическую сторону дела.

Z. Vorel

4037. **К вопросу о существовании симметрических решений обобщенной задачи трех тел. Григорьева И. А.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 278—286

Рассматривается движение системы трех материальных точек P_1, P_2 и P_3 с массами m_1, m_2 и m_3, взаимодействующих друг с другом с силой, равной $\pm m_i m_j / r_{ij}^{2\alpha+1}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где $r_{ij} = P_i P_j$, $\alpha > -1/2$.

Доказывается теорема: Если при всех t треугольник $P_0P_1P_2$ остается равнобедренным ($r_{13} = r_{23}$), но не равносторонним (случай Лагранжа), то две массы должны быть равны ($m_1 = m_2$). В случае $r_{13} = r_{23}$ уравнения движения сводятся к следующим:

$$\mathbf{r}'' = -P\mathbf{r}, \quad \rho'' = -Q\rho,$$

где

$$P = [m_1 + m_2]/r^{2\alpha+2} + m_3/r_1^{2\alpha+2};$$

$$Q = [m_1 + m_2 + m_3]/r_1^{2\alpha+2} \quad (r_{12} = r;\ r_{13} = r_{23} = r_1).$$

Эти уравнения позволили автору составить избыточную систему 5 уравнений с 4 неизвестными функ-

циями. Вводя малый параметр λ таким образом, чтобы при $\lambda = 0$ получались интегрируемые уравнения, автор доказывает их несовместность при $\lambda = 0$, $m_1 \neq m_2$.

В силу теоремы Пуанкаре о разложимости решений дифференциальных уравнений по степеням λ доказана невозможность движения при достаточно малых $|\lambda| \neq 0$, $r_{13} = r_{23}$, $m_1 \neq m_2$. Г. А. Мерман

4038. Обзор деятельности А. А. Андронова в области автоматического регулирования. Айзерман М.А., В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., Изд-во АН СССР, 1955, 20—33. Список работ А. А. Андронова с аннотациями 33—42.

См. РЖМех, 1956, 2600.

4039. Исследование и построение многоконтурных систем со многими регулируемыми величинами, обладающими высокой степенью установившейся точности. Мееров М. В. В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., Изд-во АН СССР, 1955, 230—241

4040. О применении методов малого параметра для исследования периодических режимов в системах автоматического регулирования, не содержащих малого параметра. Айзерман М. А., Смирнова И. М. В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., Из-во АН СССР, 1955, 77—92

Обсуждаются методы приближенного определения периодических режимов в нелинейных системах автоматического регулирования. Речь идет о методах, которые исходят из предположения близости этих режимов к гармоническим колебаниям. Рассматриваются две гипотезы (гипотеза авторезонанса и гипотеза фильтра), позволяющие в ряде случаев обосновать приближенные методы. Излагаются методы решения задач отыскания и задач устойчивости периодических режимов, основанные на этих гипотезах (в статье приведена также соответствующая библиография). В случае авторезонанса авторы считают достаточно обоснованными как приближенные методы отыскания периодических движений, так и методы исследования устойчивости режимов. В случае фильтра формально оправдано лишь использование предположения о малом отличии периодического режима от гармонического колебания. Показано, однако, что и здесь в ряде случаев (нечетная, однозначная нелинейность $f(x)$) приводит к хорошим результатам «незаконное» применение методов, соответствующих принятому в системах с малым параметром предположению о наличии порождающей частоты приближенной системы. В заключение отмечается отсутствие (к моменту написания статьи) достаточно удобных практических методов оценки устойчивости периодического режима в случае гипотезы фильтра. Н. Н. Красовский

4041. Об учете трения в проблеме колебаний. Грёбнер (Über die Berücksichtigung der Reibung bei Schwingungsproblemen. Gröbner W.), Österr. Ingr-Arch., 1956, 10, № 2—3, 171—175 (нем.)

Рассматривается механическая система (мембрана, пластинка), состояние которой может быть охарактеризовано одной величиной $u(x, y, t)$. Пусть H — гамильтониан этой системы, составленный без учета сил трения, а $M(u) = 0$ — дифференциальное уравнение колебаний, полученное из вариационного принципа Гамильтона. Показано, что при условиях закрепления пластины по краям

$$H'(t) = \iint_B M(u)\, u_t dx dy,$$

где B — область, занятая системой.

Учет сил трения производится феноменологически. Чтобы удовлетворить условию $H'(t) < 0$, выражающему факт диссипации энергии, автор полагает

$$M(u) = -\varepsilon(x, y)\,(u_t)^{2n-1},$$

где $\varepsilon(x, y) > 0$ в области B. Простейший случай $n = 1$, $\varepsilon = \text{const}$ приводит к уравнениям, обычно рассматриваемым в подобного рода задачах.

М. И. Клиот-Дашинский

4042. Отражение акустических давлений, пульсирующих на плоской границе раздела жидкости и эластичной сплошной среды. Спенсер (Reflection of an acoustical pressure pulse from a liquidsolid plane boundary. Spencer T. W.), Geophysics, 1956, 21, № 1, 71—87, 214 (англ.)

Рассматривается вопрос об отражении плоских неустановившихся волн в системе, состоящей из слоя жидкости, ограниченной с одной стороны (сверху) вакуумом, а с другой стороны (снизу) эластичной сплошной средой в том случае, когда эта среда приводится в движение произвольным давлением, равномерно распределенным на сферической полости, погруженной в жидкость.

Решение соответствующих уравнений производятся с помощью преобразования Лапласа: при этом решение для вертикального смещения состоит из акустического члена и поправки к нему. В сплошной среде, для которой коэффициент Пуассона больше, чем одна треть, величина поправки положительна (направлена во внутрь среды).

В среде, где коэффициент Пуассона меньше, чем одна треть, величина поправки может быть и положительной и отрицательной, в зависимости от соотношений между давлением и скоростью его изменения.

Поверхностные волны могут появляться независимо от выбора параметров сплошной среды.

Скорость поверхностных волн всегда меньше, чем при отсутствии жидкости. К. П. Станюкович

4043. Гармонический анализ несжимаемого вязкого потока с осевой симметрией. Пракаш (Harmonic analysis of the axially symmetrical incompressible viscous flow. Prakash Prem), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 2, 102—117 (англ.)

Рассматривается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области D меридиональной плоскости, ограниченной контуром B, при однородных граничных условиях для скорости на B. При помощи преобразования Фурье функции тока симметричного пространственного потока, компонентов скорости и вихря автор образует четыре функции Ψ, U, V, Z, для которых получает систему линейных дифференциальных уравнений. Далее выводится интегро-дифференциальное уравнение, связывающее между собой функции U, V и Z, эквивалентное дифференциальному уравнению течения, полученному из уравнений Навье—Стокса путем исключения из них давления.

В случае полуплоскости граничные условия на B заменяются условиями затухания движения на бесконечности, и интегро-дифференциальное уравнение несколько упрощается. При этом на рассматриваемые функции налагаются условия стремления к нулю на бесконечности, обеспечивающие существование преобразования Фурье. Наконец рассматривается частный случай, когда между вихрем ζ и функцией тока ψ существует следующая зависимость: $\zeta = \bar{\omega} f(\psi)$, где $\bar{\omega}$ — расстояние от оси симметрии.

Аналогичные вопросы в случае двумерного течения были рассмотрены в работе Кампе де Ферье (Kampé de Fériet T., Quart. Appl. Math., 1948, 6, № 1, 1—13).

Чтение работы затруднено тем, что в некоторых формулах дифференцирование по осевой координате и по направлению нормали к граничному контуру автор обозначает одинаково. Д. Е. Долидзе

4044. Инерционное неустановившееся движение сплошного цилиндра. Бреус (Інерційний неусталений рух суцільного циліндра. Бреус К. А.),

Доповіді АН УРСР, 1956, № 4, 321—324 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается задача о неустановившемся движении круглого цилиндра, возникающем вследствие удара твердой пластинки по одному из оснований цилиндра.

Предполагая движение потенциальным, автор находит численное решение методом электромоделирования. Полученное решение хорошо совпадает с экспериментальными результатами. Н. А. Ростовцев

4045. Об одной задаче фильтрации. Жаутыков О. А., Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 70—79

Рассматривается задача о плоско-радиальной неустановившейся фильтрации однородной упругой жидкости в бесконечном упругом пласте.

Математически задача сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (R_c \leqslant r \leqslant R_k;\ t \geqslant 0) \qquad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$p(r,\ t)\,|_{t=0} = \varphi(r),\ p(r,\ t)\,|_{r=R_k} = p_0 = \text{const};$$

$$\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_c} = \beta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{r=R_c},$$

где α и β — некоторые постоянные, $\varphi(r)$ — непрерывная функция, заданная во всех точках области $R_c \leqslant r \leqslant R_k$.

С помощью преобразования Лапласа

$$\bar{p}(r,\ s) = \int_0^\infty p(r,\ t)\, e^{-st} dt$$

решение уравнения (1) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\bar{p}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{p}}{dr} - \frac{s}{a^2}p = -\frac{s}{a^2}\varphi(r) \qquad (2)$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\bar{p}(r,\ s)\,|_{r=R_k} = \frac{p_0}{s}, \\ &\left[\alpha\frac{d\bar{p}}{dr} - \beta(s\bar{p} - \varphi)\right]_{r=R_c} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Строится решение уравнения (2) с условиями (3) и по теореме обращения находится оригинал $p(r,\ t)$.

Полученное решение выражается через специальные функции и имеет весьма громоздкий вид, что отмечается автором. В. П. Коробейников

4046. О мембранах, обладающих особым механическим поведением. Сторки (Sulle membrane aventi comportamento meccanico eccezionale. Storchi Edoardo), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, 86, № 2, 462—483 (итал.)

Работа является заключительной в серии работ автора, начавшихся публикацией с 1949 г., посвященных проблеме построения общего решения уравнений упругого равновесия в двумерном римановом пространстве. Было показано, что общее решение для поверхностей вращения выражается через функцию напряжения и ее производные до третьего порядка включительно, тогда как в общем случае произвольной поверхности решение требует для своего выражения производных функций напряжений до пятого порядка включительно. Был найден также более широкий класс поверхностей, названных автором особыми, на которых двумерная задача упругости имеет общее решение, выражающееся через функцию напряжений и ее производные до четвертого порядка включительно. В настоящей работе автор детально исследует метрику этих поверхностей. Выведены условия в виде уравнений с частными производными по геодезическим координатам, которым должна удовлетворять гауссова кривизна K для того, чтобы общее решение выражалось через функцию напряжений и ее производные до второго, третьего и четвертого порядков. Тем самым различаются особые поверхности 2-го типа (поверхности постоянной кривизны), 3-го типа (поверхности вращения) и 4-го типа. Устанавливается, что хотя на поверхностях 4-го типа, не возможны жесткие смещения фигур, тем не менее мембраны специальной формы (прямоугольник, ограниченный двумя линиями $K = \text{const}$ и двумя их ортогональными траекториями) обладают одной степенью свободы полужестких перемещений (вдоль линий $K = \text{const}$ или вдоль их ортогональных траекторий), т. е. таких перемещений, при которых деформация удлинения испытывается лишь в одном направлении, тогда как элементы мембраны, ортогональные к этому направлению, удлинения не испытывают. Н. А. Ростовцев

4047. О двух классических проблемах плоской теории упругости. Гран-Ульссон (Über zwei klassische Probleme aus der Theorie der ebenen Elastizität. Gran Olsson R.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1955, 28, № 29, 161—165 (нем.)

Проведено исследование двух осесимметричных напряженных состояний в упругой плоскости, описываемых функциями напряжений вида

$$F = C_1 r^2 \ln r + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4$$

или $F = C_5\varphi$;

r, φ — полярные координаты. Г. Н. Савин

4048. Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. Уфлянд Я. С., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 5, 578—587

Дано новое решение основной смешанной задачи теории упругости для полупространства ($z \geqslant 0$): в области $z = 0$, $r < a$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) заданы перемещения u, v, w, а в области $z = 0$, $r > 0$ — напряжения σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} (РЖМат, 1955, 5846).

Некоторое упрощение достигнуто автором благодаря представлению решения уравнений теории упругости в форме Папковича—Нейбера, что позволило, распорядившись выбором четвертой гармонической функции, несколько упростить формулировку краевых задач.

Решение краевых задач производится в тороидальных координатах с применением интегрального преобразования Мелера—Фока.

В качестве примера рассмотрен случай $u = \text{const}$, $v = 0$, $w = \gamma x$ (эта задача рассмотрена в докторской диссертации референта). Автору удалось получить в замкнутом виде соотношения между приложенными к штампу силами и его перемещениями. Отмечается весьма любопытный результат: если к штампу приложена пара сил с главным моментом, направленным параллельно основанию штампа, то под ее действием штамп не только повернется, но и получит некоторое поступательное перемещение.

В. И. Моссаковский

4049. Теория висячих мостов и применение функций влияния. Гравина (Sulla teoria dei ponti sospesi e l'impiego delle funzioni d'influenza. Gravina Pedro B. J.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 203—227 (итал.)

В обычных предположениях рассматривается задача об изгибе балки жесткости висячего моста. В основу положено классическое дифференциальное уравнение, решение которого строится с помощью функции Грина. Библ. 15 назв. Я. Г. Пановко

4050. Диффракция цилиндром конечной длины. Вильямс (Diffractoin by a cylinder of finite length. Williams W. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 322—335 (англ.)

Рассматривается задача о диффракции плоской гармонической звуковой волны полым круговым цилиндром конечной длины l. Потенциал диффракционной волны u в цилиндрических координатах ρ, θ, z удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k^2)\, u = 0$$

и дополнительным условиям:
1) $\partial u/\partial\rho = -\partial u_0/\partial\rho$ для $\rho = a$, $-l < z < 0$;
2) $\partial u/\partial\rho$ непрерывна для всех ρ, z;
3) u непрерывна и конечна всюду, за исключением $\rho = a$, $-l < z < 0$;
4) $u \sim \exp(-ikr)/r$ при $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \to \infty$;
5) для единственности решения задачи принимаются дополнительные условия на концах цилиндра ($z = 0$, $-l$)

$$\left.\begin{aligned} &(u + u_0)\,|_{\rho=a} = o(1) \\ &\frac{\partial}{\partial\rho}(u + u_0)\,|'_{\rho=a} = o\left(\frac{1}{z}\right),\ o\left(\frac{1}{z+l}\right) \end{aligned}\right\} \text{ при } z \to 0,\ -l,$$

где $u_0 = \exp[-i(z\cos\alpha + x\sin\alpha)]$ $(0 < \alpha < \pi)$ — потенциал скорости падающей волны. Применяются методы операционного исчисления; лапласово изображение искомого волнового потенциала u определяется при помощи двух вспомогательных аналитических функций, удовлетворяющих двум интегральным уравнениям в некоторой полосе комплексной плоскости.

Найдено приближенное решение предложенной системы интегральных уравнений в случае, когда произведение (kl) числа волн и длины цилиндра достаточно велико. Рассматривается случай резонанса системы; найдено соответствующее уравнение для длин резонансных волн при $kl \gg 1$. Получено строгое выражение концевой поправки r-резонансной системы ($kl \sim r\pi$), концевая поправка сопоставляется с известными экспериментальными данными.

В. П. Пилатовский

4051. Критические замечания о вариационном методе в задачах рассеяния. Джонс (A critique of the variational method in scattering problems. Jones D. S.), IRE Trans. Antens and Propagat., 1956, AP-4, № 3, 297—301. Discuss., 538—539, 540—544 (англ.)

4052. Замечания, касающиеся магнитно-гидродинамических волн Альфена. Карини (Osservazioni riguardanti le onde magneto-idrodinamiche di Alfvén. Carini Giovanni), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 1, 150—156 (итал.)

Рассчитывается скорость распространения плоских магнито-гидродинамических волн с учетом токов смещения. Жидкость предполагается несжимаемой, ее электрическая проводимость бесконечной, а поле тяжести отсутствующим. При этих условиях одним из решений уравнений магнито-гидродинамики является плоская волна, распространяющаяся по направлению постоянного магнитного поля со скоростью

$$V = \frac{H_0\sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho + \varepsilon\mu^2 H_0^2}},$$

где H_0 — величина постоянного магнитного поля, а ρ — плотность жидкости. Показывается, что поверхность разрыва в жидкости распространяется с этой же скоростью. Векторы магнитного поля и скорости частиц непрерывны, а их первые производные претерпевают разрыв. Векторы, характеризующие разрыв этих производных, параллельны, а вектор скорости перпендикулярен направлению распространения. Такой разрыв автор называет трансверсальным.

П. П. Бирюлин

4053. Распространение плоских гидродинамических волн в электропроводящей жидкости, находящейся в постоянном однородном магнитном поле. Карини (Propagazione di onde piane magneto-idrodinamiche in un liquido conduttore mobile in un campo magnetico omogeneo. Carini Giovanni), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 2, 439—444 (итал.)

В предыдущей работе автора (реф. 4052) была вычислена скорость распространения плоских гидродинамических волн по направлению постоянного магнитного поля для случая бесконечно большой проводимости несжимаемой жидкости. В настоящей работе вычисление проводится для случая конечной проводимости. Волны при этом оказываются затухающими. Глубина проникновения и фазовая скорость соответственно равны

$$z_0 = \frac{2\sigma\mu^{5/2}H_0^3(\rho + \varepsilon\mu^2 H_0^2)^{1/2}}{\rho^2\omega^2},$$

$$W = \frac{V}{1 + \varepsilon\rho^2 V^2\omega^2/4\sigma^2\mu^3 H_0^4},$$

где H_0 — величина постоянного магнитного поля, ρ — плотность жидкости, σ — электрическая проводимость, V — фазовая скорость волны при $\sigma = \infty$.

П. П. Бирюлин

4054. Условие динамической совместности в теории магнито-гидродинамических волн. Карини (Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche. Carini Giovanni), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 2, 433—438 (итал.)

Рассматриваются магнитно-гидродинамические волны в несжимаемой жидкости, обладающей бесконечно большой электрической проводимостью. Пусть $z = z(x_1, x_2, x_3, t)$ есть уравнение поверхности, на которой магнитное поле $\mathbf{H}$ и скорость частиц жидкости $\mathbf{v}$ непрерывны, а их производные претерпевают разрыв. Пусть $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ и $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ — векторы, характеризующие разрыв производных магнитного поля $\mathbf{H}$ и скорости частиц $\mathbf{v}$, так что

$$\Delta(d\mathbf{H}/dt) = (dz/dt)\,\boldsymbol{\nu}, \quad \Delta(d\mathbf{v}/dt) = (dz/dt)\,\boldsymbol{\lambda},$$

где $\Delta(d\mathbf{H}/dt)$ и $\Delta(d\mathbf{v}/dt)$ — величины скачка производных $(d\mathbf{H}/dt)$ и $(d\mathbf{v}/dt)$ на поверхности разрыва. Так как векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ должны удовлетворять уравнениям гидродинамики, то векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ должны удовлетворять условиям динамической совместности

$$(dz/dt)\,\boldsymbol{\nu} - (\mathbf{H}\mathbf{gn})\,\boldsymbol{\lambda} = 0,$$

$$(dz/dt)\,\boldsymbol{\lambda} - \frac{\mu}{\rho}[\mathbf{H}[\mathbf{v}\mathbf{gn}]] = 0,$$

где $\mathbf{gn}$ — градиент поверхности разрыва, ρ — плотность жидкости. Из условия разрешимости этой системы уравнения относительно компонент векторов

ν и λ следует формула для скорости распространения волны гидродинамического разрыва

$$V = (\mu/\rho)^{1/2}(\mathbf{H}_n),$$

где $\mathbf{H}_n$ — проекция магнитного поля на нормаль к поверхности разрыва. В случае, когда магнитное поле мало отличается от постоянного и плоская волна распространяется в направлении постоянного поля $\mathbf{H}_0$, получается формула, найденная Альфеном

$$V = (\mu/\rho)^{1/2}|\mathbf{H}_0|.$$

П. П. Бирюлин

4055. О распространении электромагнитных волн в движущихся однородных средах. Ферла (Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto. Ferla Ambrogio), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 229—237 (итал.)

Рассматриваются электромагнитные волны в равномерно движущейся однородной непроводящей среде. Автор оперирует с уравнениями Максвелла в векторной форме, не расписывая их на компоненты, и получает уже известные результаты. Например, в случае движения среды в положительном направлении оси x уравнение для напряженности электрического поля получается в виде

$$(1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\mathbf{E}\right) + (n^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\mathbf{E} + \\ + \sigma\mu\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{E} = 0.$$

П. П. Бирюлин

4056. Об уравнениях Минковского для движущихся проводящих сред. Карини (Sulle equazioni di Minkowski per i conduttori in moto. Carini Giovanni), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1955, **88**, № 1, 152—158 (итал.)

Рассматривается задача об электромагнитном поле в равномерно движущейся проводящейся среде. Показано, что в случае отсутствия электрических зарядов в системе координат, связанной с телом, вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ в системе координат, относительно которой тело движется, удовлетворяют одному уравнению вида

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{dt^2} - \Delta\mathbf{B} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2 - v^2}\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} + \frac{\sigma\mu}{c\sqrt{c^2-v^2}}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0.$$

Этот результат получается автором в векторном виде исключением трех других векторов из уравнений Минковского. Показано также, что если скорость тела имеет только одну компоненту, то это уравнение может быть получено из уравнения для покоящегося тела преобразованием Лоренца.

П. П. Бирюлин

4057. К решению уравнения Больцмана для газа Лоренца; приложение к случаю слабо ионизованного газа. Байе, Делькруа, Денисс (Sur la résolution de l'équation de Boltzmann danz le cas d'un gaz de Lorentz; application aux gaz faiblement ionisés. Bayet Michel, Delcroix Jean-Loup, Denisse Jean-François), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 22, 2146—2148 (франц.)

Уравнение Больцмана для двойной газовой среды

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{g}(\mathbf{v}, t)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J_{11}(f, f) + J_{12}(f, F)$$

сильно упрощается в случае газа Лоренца, т. е. среды, состоящей из тяжелого газа и меньшего количества легкого газа и имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{g}(\mathbf{v}, t)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(f);\ J(f) = N\nu\int\int(f' - f)\rho d\beta d\varepsilon,$$

где $J(f)$ — интегральный оператор столкновений легких и тяжелых частиц. Показано, что решением этого уравнения являются классические сферические функции, собственные значения которых полностью вычисляются на основе закона соударений. Рассмотрено поведение слабо ионизованного газа в электромагнитном поле. Показано, что при отсутствии магнитного и электрического полей частоты релаксации легко определяются; магнитное поле приводит к тем же частотам релаксации, но возникает связь между сферическими функциями одного и того же индекса m; наличие электрического поля приводит к связи между коэффициентами отдельных сферических функций, поэтому для расчета необходимо использовать приближенные методы. Сравнительно просто проводятся вычисления для слабого электрического поля. При наличии как магнитного, так и электрического полей усложняется запись уравнений, но основной трудностью остается нахождение связи между коэффициентами различных сферических функций.

Е. С. Алексеев

4058. Определения и аналитические свойства матриц R и S, связанных с тензорными силами. I. Случай матрицы R. Ласкар, Мошинский (Définitions et propriétés analytiques des matrices R et S associées aux forces tensorielles. I. Cas de la matrice R. Laskar Williams, Moshinsky Marcos), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 26, 2496—2498 (франц.)

При наличии тензорных сил волновая функция триплетного состояния записывается в виде:

$$\Psi = r^{-1}u^{(r)}_{1,J}\mathbf{Y}^M_{J,J-1}(\theta, \varphi) + r^{-1}u^{(r)}_{2J}\mathbf{Y}^M_{J,J+1}(\theta, \varphi).$$

Радиальные коэффициенты векторных сферических гармоник удовлетворяют матричному уравнению:

$$\left[\frac{d^r}{\partial r^r} - A(r) + E\right]\left[\frac{u_{1J}}{u_{2J}}\right] = 0. \qquad (1)$$

Линейно независимые решения уравнения (1) определяются из матрицы

$$H_J(E, r) = \begin{vmatrix} h^J_{11}(E, r) & h^J_{12}(E, r) \\ h^J_{21}(E, r) & h^J_{22}(E, r) \end{vmatrix}$$

при условиях $H_J(E, 0) = 0$; $H'_J(E, 0) = 1$, где $H'_J(E, 0)$ — производная по r.

Матрица $R^J(E)$ определяется соотношением

$$H_J(E, a) = \begin{bmatrix} R^J_{11}(E, a), & R^J_{12}(E, a) \\ R^J_{21}(E, a), & R^J_{22}(E, a) \end{bmatrix} H'_J(E, a).$$

Матрица $R(E)$ не зависит от связи между линейно независимыми решениями уравнения (1) и является четной функцией энергии E. Показано, что матрица $R(E)$ является мероморфной функцией энергии и симметрична.

Е. С. Алексеев

4059. Современная физика и уравнение Шрёдингера в теории относительности. Гарсия (Sobre la fisica contemporanea y la ecuacion de Schrödinger

en la teoria de la relatividad. García Godofredo), Actas Acad. nac. cienc. exact., fis. y natur. Lima, 1953, 16, № 3—4, 3—35 (исп.)
См. РЖФиз, 1957, 8439.

4060. Релятивистские уравнения де-Бройля и Шрёдингера. Устойчивость квантованных движений. Гарсия (Las ecuaciones relativistas de Broglie y de Schrödinger. Estabilidad de los movimien tos cuantificados. García Godofredo), Actas Acad. nac. cienc. exact., fis. y natur. Lima, 1953, 16, № 3—4, 36—55 (исп.)
См. РЖ Физ, 1957, 8440.

4061. К. Математический анализ волнового движения в электричестве и оптике на основании максвелловских уравнений. Бейтман (Mathematical analysis of electrical and optical wave-motion on the basis of Maxwell's equations. Bateman Harry. Dover, 1955, 159 pp., l. 60 doll.) (англ.)
Книга представляет второе издание известной монографии Бейтмана по теории распространения электромагнитных волн. Впервые книга вышла в 1915 г. в издании Кэмбриджского университета и настоящее (американское) издание текстуально воспроизводит первое. Книга посвящена изложению математического аппарата, применяемого при изучении волнового процесса в электромагнитной среде, в первую очередь различных решений волнового уравнения.

Автор строит целый ряд решений волнового уравнения в виде определенных интегралов, распространенных на постоянную или переменную область. В литературе они известны под именем бейтмановских форм волновых функций.

В частности, к таким формам принадлежит ранее найденное Уиттекером представление волновой функции в виде двойного интеграла

$$\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f[x\sin\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\sin\beta + z\cos\alpha - ct,\ \alpha,\ \beta]\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta,$$

впоследствии примененного Дебаем к изучению поведения световых волн вблизи фокуса.

В дальнейшем изложении автор подробно останавливается на изучении уравнения Гельмгольца $\Delta(u) + k^2u = 0$, причем в зависимости от характера задач при разделении переменных применяется та или иная система ортогональных координат.

При трактовке задач дифракции автор применяет различные системы координат, определяемые равенством

$$\rho + iz = f(\alpha + i\beta),$$

которые при надлежащем выборе функции f дают координаты сфероидальные, параболоидальные, тороидальные и др. Уравнение Гельмгольца в этих координатах приводит к построению ряда специальных функций, имеющих важное значение при решении задач по теории распространения электромагнитных волн.

В конце книги рассматриваются электромагнитные поля с движущимися особенностями. Сюда относится поле с одной простой особенностью (электроном), а также поле с движущейся сингулярной кривой. В заключение исследуется вопрос о математической трактовке принципа Гюйгенса. Выводятся классические формулы Пуассона, Вольтерра и Кирхгофа.

Книга Бейтмана содержит большое число различного рода формул, относящихся к теории специальных функций, причем эти формулы показаны в приложении к решению интересных физических задач. Почти каждая глава заканчивается рядом прекрасно подобранных задач для самостоятельной проработки прилагаемого материала. Н. С. Кошляков

4062 К. Курс теоретической механики для студентов-математиков. Том. I. Векторы, статика точки и кинематических систем, динамика точки. Годьо (Cours de mécanique rationnelle, à l'usage des élèves de mathematiques spéciales. T. I. Vecteurs, statique du point et des systèmes cinématique et dynamique du point. 7 éd. Gaudiot Paul. Paris, Eyrolles, 1956, XIV, 385 p., ill., 3000 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 29, 680 (франц.)

См. также: 3683, 3684, 3894, 4071, 4072, 4092, 4149, 4180, 4291, 4195 К, 4365, 4366, 4369—4374 4377, 4379—4383

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4063. Об одном классе линейных интегральных уравнений. Скоробогатько В. Г., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 137—152
Исследуются уравнения вида

$$u(x) = f(x) + \lambda A(x)\, u^{(i)}(\alpha) + \lambda\int_0^1 K(x,\ t)\, u(t)\, dt.$$

Опираясь на теорию интегральных уравнений в интегралах Стилтьеса, разработанную Н. М. Гюнтером (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1932, 1,1—494), автор исследует случаи: 1) λ не является характеристическим числом и 2) λ — характеристическое число первого ранга. Случай, когда ранг характеристического числа больше единицы, исследован в другой работе автора (РЖМат, 1956, 2276).
В. А. Щелкунов

4064. Решение некоторого интегрального уравнения, встречающегося в теориях предвидения и детектирования. Миллер, Заде (Solution of an integral equation occurring in the theories of prediction and detection. Miller K. S., Zadeh L. A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 72—75, 97—98 (англ.)
Рассматривается интегральное уравнение вида

$$y(t) = \int_{a-}^{b+} R(t,\ \tau)\, x(\tau)\, d\tau,\quad a \leqslant t \leqslant b, \qquad (1)$$

где пределы интегрирования берутся от $a-$ до $b+$ с целью возможности включения в ядро $R(t, \tau)$ членов вида δ-функции в точках a и b. Предполагается, что $R(t, \tau)$ имеет следующее выражение:

$$R(t,\ \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t,\ \lambda)\,\Gamma(\tau,\ \lambda)\, d\lambda.$$

Здесь $\Gamma(t, \lambda)$ является, в свою очередь, результатом воздействия на функцию $\delta(t-\lambda)$ последовательных дифференциальных и обратных дифференциальных операторов, что в простейшем случае выражается так:

$$\Gamma(t,\ \lambda) = L^{-1}M\delta(t-\lambda),$$

где L и M — некоторые специализированные линейные дифференциальные операторы с переменными коэффициентами.

Оператор L^{-1} имеет следующий смысл. Через $L^{-1}(t, \xi)$ обозначим импульсную характеристику системы, описываемой оператором L, т. е. функцию, удовлетворяющую равенствам

$$L_t L^{-1}(t, \xi) = \delta(t-\xi),\ L^{-1}(t, \xi) = 0 \text{ при } t < \xi,$$

где значок у оператора означает переменную, по которой берется дифференцирование. Тогда воздействие оператора L^{-1} на некоторую функцию $g(t)$ определяется таким интегралом:

$$L^{-1}g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L^{-1}(t, \xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

При нахождении решения уравнения (1) существенно используется импульсная δ-функция. Указывается смысл этого уравнения в теории информации. Приводится пример. Библ. 23 назв. Н. А. Бразма

4065. Сингулярные интегральные уравнения типа Карлемана. Трикоми (Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman. Tricomi Francesco G.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 229—244 (итал.)

Конечное преобразование Гильберта

$$\mathbf{I}_x[\varphi(y)] \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy \qquad (1)$$

(звездочка всюду указывает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши) мало изучено и представляет весьма большой интерес. Некоторые важные его свойства нельзя механически получить, положив $\varphi(y) \equiv 0$ вне интервала $(-1,1)$, из свойств хорошо изученного преобразования

$$H_x[\varphi(y)] \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{*\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy.$$

Поэтому для изучения свойств преобразования (1) необходимы иные методы.

Этому преобразованию посвящена работа автора (Quart. J. Math. Oxford, 1951, 2, (2), 199—211), в которой изучается в $L_p\,(p>1)$ формула обращения для

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy = f(x) \quad (-1<x<1).$$

Полученные при этом результаты используются в реферируемой работе для изучения сингулярного уравнения типа

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^{*b} \frac{H(x, y)}{y-x}\varphi(y)\, dy = F(x)$$

($H(x, y)$ — достаточно регулярная функция). Последнее сводится к каноническому уравнению типа Карлемана

$$a(x)\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy = f(x), \qquad (2)$$

$a(x) = 1/H(x, x)$, для которого доказывается теорема: Если $a(x)$ непрерывна в интервале $(-1,1)$ и в произвольно малых окрестностях концов его удовлетворяет условию Липшица порядка ε и если $f(x)$ принадлежит такому L_q, что $q > (1-\gamma)^{-1}$, $\alpha = \frac{1}{\pi}\underset{(0,\pi)}{\arctg}(\lambda\pi/a(-1))$,

$$\beta = \frac{1}{\pi}\underset{(0,\pi)}{\arctg}(\lambda\pi/a(1)),\quad \gamma = \max(\alpha, 1-\beta),$$

тогда имеет место формула

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x)+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}(1-x)^{-1}}{\sqrt{a^2(x)+\lambda^2\pi^2}} \times$$

$$\times\int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)}(1-y)f(y)}{\sqrt{a^2(x)+\lambda^2\pi^2}}\,\frac{dy}{y-x} + \frac{Ce^{-\tau(x)}(1-x)^{-1}}{\sqrt{a^2(x)+\lambda^2\pi^2}},$$

где C — произвольная постоянная, а

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}\frac{\theta(y)}{y-x}\, dy,\quad \theta(x) = \underset{(0,\pi)}{\arctg}\frac{\lambda\pi}{a(x)}.$$

Это решение принадлежит (по крайней мере) классу L_{q^*} при $1 < q^* < q/(1+\gamma q)$, а член, содержащий произвольную постоянную C, представляет общее решение в классе $L_p\,(p>1)$ соответствующего однородного уравнения.

В случае $q > 1/(1-\beta)$

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x)+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x)+\lambda^2\pi^2}} \times$$

$$\times\int_{-1}^{*1} \frac{e^{-\tau(y)}f(y)}{\sqrt{a^2(y)+\lambda^2\pi^2}}\,\frac{dy}{y-x} + \frac{C'e^{\tau(x)}(1-x)^{-1}}{\sqrt{a^2(x)+\lambda^2\pi^2}},$$

C' — также произвольная постоянная. А. И. Гуссейнов

4066. Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Абасов (Бир синиф Коши нувəли гейрихəтти сингуляр интеграл тənликлəр ьаггында. Абасов А. М.), Элми асарлəр Азəрб., унив., Уч. зап. Азерб. ун-та; 1956, № 3, 3—8 (азерб.; рез. русс).

Относительно нелинейного интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda\Phi\left(t, \varphi(t), \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\, d\tau\right), \qquad (1)$$

где Γ — конечная совокупность взаимно непересекающихся гладких простых кривых с непрерывной кривизной, доказывается следующая теорема: Если функция $\Phi[t, \varphi(t), \Psi(t)]$ удовлетворяет условиям

$$\int_\Gamma |\Phi(t, \beta, \delta)|^p\, |dt| < \infty\ (\beta, \delta = \text{const}, p>1)$$

$$|\Phi(t, \varphi_1, \psi_1) - \Phi(t, \varphi_2, \psi_2)| < M_1|\varphi_1-\varphi_2| + M_2|\psi_1-\psi_2|,$$

то при достаточно малых значениях λ уравнение (1) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $L_p(\Gamma)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Ф. Д. Гахов

4067. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Цитланадзе Э. С., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1956, 22, 227—236

Автор, продолжая свои исследования (РЖМат, 1953, 328; 1956, 5281), указывает достаточные условия существования собственных элементов нелинейных интегральных операторов, являющихся производными Гато слабо непрерывного функционала, определенного на регулярном банаховом пространстве.

Ю. Г. Борисович

4068. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений Урысона, ядра которых — аналитические функции относительно параметра. **Мамедов Я. Д.**, Уч. зап. Азерб. ун-та, 1956, № 8, 3—11 (рез. азерб.)

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x)=\int_G K[x,\ s,\ \varphi(s),\ \lambda]\,ds \qquad (1)$$

в предположении, что G — ограниченная замкнутая область m-мерного евклидова пространства и $K(x, s, y, \lambda)$ — вещественная непрерывная функция, определенная для $x, s \in G$ и $y,\ \lambda \in [0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям: $K(x, s, 0, \lambda) \equiv 0$; $K(x, s, x, \lambda)$ — аналитическая функция от λ; $F_k(x, s, y, \lambda) = y^{-1}\partial^k/\partial\lambda^k K(x, s, y, \lambda)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ положительны и непрерывны по y равномерно относительно x, s; если $y_1 < y_2$, то $\min\limits_{x,\,s\in G}\{F_k(x, s, y_1, \lambda) - F_k(x, s, y_2, \lambda)\} > 0$; F_i и F_j ортогональны для всяких i и j; $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} P(x, s, \lambda) = \lim_{y\to 0} F_k(x, s, y, \lambda)$ и $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} Q(x, s, \lambda) = \lim_{y\to 0+\infty} F_k(x, s, y, \lambda)$, причем $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} Q$ либо тождественно равны нулю, либо имеют положительные минимумы. Доказывается, что уравнение (1) имеет единственное положительное решение, которое находится методом последовательных приближений при подходящем выборе начального приближения, для всякого $\lambda \in (\alpha, \beta)$, где α и β — наименьшие собственные значения соответствующих уравнений

$u(x) = \int_G P(x, s, \lambda)\, u(s)\, ds$ и $u(x) = \int_G Q(x, s, \lambda)\, u(s)\, ds$.

Исследуются решения $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (1), когда правая часть (1) имеет ещё положительное слагаемое $f(x)$. Показано, что $\varphi(x, \lambda)$ — возрастающая и дифференцируемая функция от λ, причем $\varphi(x, \lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \beta$. Имеются опечатки. М. М. Вайнберг

4069. Об интегро-дифференциальном операторе типа Коши. Эллиотт (On an integro-differential operator of the Cauchy type. Elliott Joanne), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 616—626 (англ.)

Исследуется интегро-дифференциальное уравнение

$$\lambda F(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{F'(t)}{t-x}\,dt = f(x) \quad (\lambda > 0), \qquad (1)$$

являющееся частным случаем уравнения, встречающегося в теории крыла самолета, а также его видоизменения

$$-\frac{1}{\pi(a^2-x^2)}\left[\int_{-a}^{a}\frac{\Phi'(t)(a^2-t^2)}{t-x}\,dt - \int_{-a}^{a}\Phi(t)\,dt\right] = f(x), \qquad (2)$$

$$\lambda F(x) - \frac{1}{\pi(a^2-x^2)}\left[\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)(a^2-t^2)}{t-x}\,dt - \int_{-a}^{a}F(t)\,dt\right] = f(x). \qquad (3)$$

Известно (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1956, стр. 381—386), что если на искомую функцию не накладываются условия симметрии, то уравнение (1) может быть приведено к равносильному уравнению Фредгольма

$$F(x) + \lambda\int_{-a}^{a} K(x, t)\, F(t)\,dt = \int_{-a}^{a} K(x, t)\, f(t)\,dt + A\arcsin\frac{x}{a} + B,$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a^2 - xt + [(a^2-x^2)(a^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}}{a^2 - xt - [(a^2-x^2)(a^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

A, B — произвольные постоянные. Пусть $\Gamma(x, t, \lambda)$ есть резольвента ядра $K(x, t)$. В работе доказывается следующее:

1. Если $\varphi(x) \in C[a, b]$, то функции

$$\Phi(x) = \int_{-a}^{a}\frac{K(x, t)\,\varphi(t)}{a^2-t^2}\,dt,\quad F(x) = \int_{-a}^{a}\frac{\Gamma(x, t, \lambda)\,\varphi(t)}{a^2-t^2}\,dt$$

абсолютно непрерывны на любом интервале $(x_1, x_2) \in (-a, a)$ и существуют предельные значения

$$\lim_{x\to\pm a}\Phi(x) = \frac{\pi}{2a}\varphi(\pm a),\quad \lim_{x\to\pm a}F(x) = \frac{\pi}{2a}\varphi(\pm a).$$

2. Линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), даются формулами

$$F_1(x) = \frac{2a}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma(x, t, \lambda)}{a^2-t^2}\,dt,\quad F_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t\Gamma(x, t, \lambda)}{a^2-t^2}\,dt.$$

3. Решения уравнений (2), (3) даются соответственно формулами

$$\Phi(x) = \int_{-a}^{a} K(x, t)\, f(t)\,dt,$$

$$F(x) = \int_{-a}^{a}\Gamma(x, t, \lambda)\, f(t)\,dt$$

при этом, если $f(x) = (a^2-x^2)\,\varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C(-a, a)$ и

$$|\varphi(x) - \varphi(\pm a)| < M\,|a \pm x|^{\alpha}\ (\alpha > 0),$$

то эти решения будут функциями абсолютно непрерывными. Ф. Д. Гахов

4070. Некоторые граничные задачи для одного линейного интегро-дифференциального уравнения. Кастро-Бжезицкий (Algunos problemas de contorno para una ecuacion integrodiferencial lineal. Castro Brzezicki A. de), Rev. mat. hisp.-amer., 1956, 16, № 3—4, 89—97 (исп.)

Показывается, что:

1) Если $\varphi(t)=\sum B_n \sin nt$, то

$$y=-\sum \frac{B_n}{\lambda_n}\sin nt, \text{ где } \lambda_n=n^2-a-c(n);$$

$$c(n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-ni\tau}\,d\tau,$$

есть решение уравнения

$$y''+ay+\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau=\varphi(t) \qquad (1)$$

$$[f(\tau)=f(-\tau)]$$

с дополнительными условиями $y(0)=y(\pi)=0$.

2) Если $\varphi(t)=\sum A_n\cos nt$, то $y=-\sum \frac{A_n}{\lambda_n}\cos nt$ есть решение уравнения (1) с дополнительными условиями

$$y'(0)=y'(\pi)=0.$$

Далее автор получает формальные решения следующих задач.

1. Пусть: а) $\varphi(t)$ — нечетная функция, для которой начало координат есть точка разрыва; б) в $(0;\ T)$

$$\varphi(t)=\sum B_n \sin\frac{n\pi t}{T}.$$

Найти решение $y=\sum \beta_n \sin\frac{n\pi t}{T}$, для которого

$$y(+0)-y(-0)=2h;\ y(T)-y(-T)=2k.$$

2. В $(0;\ T)$ $\varphi(t)=\sum A_n\cos\frac{n\pi t}{T}$. Построить решение в виде

$$y=\sum \alpha_n\cos\frac{n\pi t}{T},$$

для которого $y'(+0)-y'(-0)=2h'$; $y'(T)-y'(-T)=2k'$.

3. $\varphi(t)=\sum A_n\cos\frac{n\pi t}{T}+B_n\sin\frac{n\pi t}{T}$. Построить периодическое решение с периодом $2T$, для которого производная первого порядка в точках t_i имеет разрывы первого рода со скачками ε_i. Я. В. Быков

4071. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. Вигранеико Т. И., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, **33**, № 3, 161—176

Изучаются условия существования решения задачи Коши $y^{(k)}(x_0)=b_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ для уравнения

$$L(y)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x,\ t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $L(y)=y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\,y^{(k)}(x)$.

Методом исследования является прием сведения данной задачи Коши к интегральному уравнению.

В § 1 рассматривается случай $n\geqslant m$. В § 2 — случай $m=n+p$ $(p>0)$. В § 3 рассматривается задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. В § 4 анализируется ошибка, допущенная в работе В. В. Васильева и отмеченная референтом (РЖМат, 1955, 477).

Примечания референта. 1) Имеются опечатки. 2) Ошибочно утверждение следствия леммы (стр. 162), так как единственность решения задачи Коши определяется тем, что λ не является собственным значением уравнения (1) для фиксированного значения x_0. 3) На стр. 170 автор утверждает, что спектр собственных значений для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения складывается из спектра собственных значений интегрального уравнения (32) и из множества корней уравнения $\Delta(\lambda)=0$. Ошибочность этого утверждения подтверждается примером интегро-дифференциального уравнения, приведенным на той же странице. В этом случае $\lambda=$ собственное значение уравнения (32). Однако при $\lambda=1$ для этого уравнения задача Коши $y(0)=b$ при любом фиксированном значении b имеет единственное решение. Я. В. Быков

4072. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений. Вигранеико Т. И., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, **33**, № 3, 177—187

Изучаются условия существования решений граничной задачи

$$u_i(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_i^k y^{(k)}(a)+\beta_i^k y^{(k)}(b)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (1)$$

$$V_n(y)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x,\ t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt,$$

где $V_n(y)\equiv y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\,y^{(k)}(x)$.

Пусть $G(x,\ t)$ — функция Грина дифференциальной системы

$$V_n(y)=0;\ u_i(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В случае $n\geqslant m$ задача (1) приводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x)=\int_a^b G(x,\ t)\left[f(t)+\lambda\sum_{\alpha=0}^{m}\int_a^b K_\alpha(t,s)\,y^{(\alpha)}(s)\,ds\right]dt$$

В случае $m=n+p$ $(p>0)$ рассматривается система

$$V_n(y)=f(x)+\sum_{k=0}^{p-1} A_k(x-x_0)^k+$$

$$+\lambda\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,\Phi(y)_\eta\,d\eta,$$

$$u_i(y)=0,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\Phi(y)_\eta=\int_a^b\sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(\eta,\ t,)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt$;

$$A_k=\lambda\int_a^b\sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0,\ t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$$

эквивалентная системе (1).

Примечание референта. На стр. 184 автор ошибочно утверждает, что постоянные A_k не должны зависеть от выбора точки x_0. Я. В. Быков

См. также: 3994, 4011, 4149, 4385

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4073. К вариационному исчислению. Круллъ (Zur Variationsrechnung. Krull Wolfgang), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 81—91 (нем.)

В классе гладких функций $x_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ рассматривается вариационная задача

$$J=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t,\ x_i(t),\ x_i'(t)\right) dt=\min, \qquad (1)$$

где L — дважды непрерывно дифференцируемая по всем переменным функция. Согласно Каратеодори, гладкая открытая дуга $x_i(t)$ $(\bar{t}_1<t<\bar{t}_2)$, $i=1, \ldots, n$, называется минимум-дугой функционала (1), если для любой точки $\{t_0,\ x_i(t_0)\}$ существует такой содержащий внутри себя эту точку отрезок $x_i(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ рассматриваемой дуги, который дает функционалу (1) минимум.

Основные необходимые и достаточные условия минимума сформулированы в виде следующих двух теорем:

1. Гладкая дуга $x_i(t)$ $(\bar{t}_1<t<\bar{t}_2)$ тогда является минимум-дугой функционала (1), когда: а) $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L_{x_i}\left(t,\ x_i(t), x_i'(t)\right)-\frac{d}{dt}L_{x_i'}\left(t,\ x_i(t), x_i'(t)\right)=0$$

$$(i=1, \ldots, n),$$

б) в любой точке $\{t_0,\ x_i(t)\}$ квадратичная форма $L^0_{x_ix_k}\xi_i\xi_k$ является положительно определенной или полуопределенной.

2. Гладкая дуга $x_i(t)$ $(\bar{t}_1<t<\bar{t}_2)$ действительно является минимум-дугой, если она удовлетворяет системе уравнений Эйлера и квадратичная форма $L^0_{x_ix_k}\xi_i\xi_k$ всюду положительно определенна.

Для утверждений 1а) и 1б) Каратеодори дал простые доказательства (Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, Leipzig, 1935). Автор дает простое доказательство (не использующее теорию поля) теоремы 2, опирающееся на одно утверждение из теории квадратичных форм и на равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(p_{ik}\eta_i\eta_k+2q_{ik}\eta_i\eta_k'+r_{ik}\eta_i'\eta_k'\right)dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(p^*_{ik}\eta_i\eta_k+2q^*_{ik}\eta_i\eta_k'+r_{ik}\eta_i'\eta_k'\right)dt,$$

где в левой части стоит вторая вариация функционала J, а p^*_{ik}, q^*_{ik} — некоторые не зависящие от $\eta_i(x)$ функции. Указывается способ построения всюду на отрезке $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ положительно определенной квадратичной формы

$$p^*_{ik}\eta_i\eta_k+2q^*_{ik}\eta_i\eta_k'+r_{ik}\eta_i'\eta_k'.$$

Далее этот метод распространяется на случай задач с кратными интегралами (когда число независимых переменных $m>1$, а число зависимых переменных $n>1$). Для этого случая доказательство только намечается. Доказывается необходимость положительной полуопределенности соответствующей квадратичной формы для задачи с кратными интегралами (аналог утверждения 1б). Называя это «элементарным доказательством», автор показывает, что для случая $m=1$, n произвольно оно совпадает с доказательством Каратеодори (см. указанную выше книгу), для $m=2$, $n=1$ оно доказано Мейсоном (Mason, Bull. Amer. Math. Soc., 1907, **13**, 293), а для случая $m=n=2$ «элементарное доказательство» не проходит.

М. К. Керимов

4074. О введении Каратеодори к работам Эйлера по вариационному исчислению. Титце (Bemerkungen zu Carathéodory's Einführung in Euler's Arbeiten über Variationsrechnung. Tietze Heinrich), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1955. München, 1956, 1—7 (нем.)

Рассматривается вопрос о применении метода Эйлера к отысканию кривой, дающей экстремум интеграла вида

$$\int_a^b f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m)}\right)dx. \qquad (1)$$

Если разбить отрезок $[a, b]$ на n частей абсциссами x_ν, а значения производных в точках x_ν заменить соответствующими отношениями в конечных разностях, то интеграл (1) аппроксимируется выражением $J(y_1, \ldots, y_{n-1})$, где y_ν рассматриваются как независимые переменные. Составляя необходимые условия экстремума функции J и переходя к пределу при $n\to\infty$, можно вывести известное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}=0.$$

Ю. В. Глебский

4075. О вычислении путем рекурренции второй вариации кратного интеграла. Гландсдорф (Sur le calcul par récurrence de la variation seconde d'une intégrale multiple. Glansdorff P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 2, 124—129 (франц.)

Де-Донде (De Donder Th., Théorie invariantive du calcul des variations. Paris, Gauthier-Villars, 1935) указал методы, удобные при вычислении второй вариации и вариаций высшего порядка кратного интеграла. В реферируемой статье уточняется смысл использованных им операторов повторения.

Рассматривается n-кратный интеграл

$$I_n=\int_{(n)} Fd\,(x),$$

где $F\equiv F\left(x^i,\ y^\alpha,\ y^\alpha_i, \ldots\right)$ является функцией n независимых переменных x^i, m зависимых переменных $y^\alpha(x^i, \tau)$ и их производных y^α_i, ... по отношению к x^i до порядка c включительно. Первую вариацию I_p можно записать так:

$$I^{(1)}_n=\int_{(n)} F_{(1)}d\,(x),$$

где

$$F_{(1)} = DF + \frac{d}{dx^i}(FX^i + D^iF),$$

$$DF \equiv \frac{\delta F}{\delta y^\alpha}\omega^\alpha, \quad D^iF \equiv \frac{\delta F}{\delta y_i^\alpha}\omega^\alpha + \ldots,$$

$$\omega^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau}, \quad \omega_i^\alpha = \frac{d\omega^\alpha}{dx^i}, \ldots$$

а X^i определяются соотношениями

$$dx^i = X^i(x, y, \tau)\,\delta\tau.$$

По определению, вторая вариация I_n является первой вариацией $I_n^{(1)}$. Кратко, ее можно выразить в форме

$$I_n^{(2)} = \int_{(n)} F_{(2)}\,d(x),$$

где

$$F_2 = DF_{(1)} + \frac{d}{dx^i}(F_{(1)}X^i + D^iF_{(1)}).$$

Автор получает явные выражения для операторов D и D^i:

$$DF_{(1)} = DDF = \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta \omega^\alpha}\,{}_2\omega^\alpha,$$

$$D^iF_{(1)} = \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y_i^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y_{ij}^\alpha}\omega_j^\alpha + \ldots +$$

$$+ \frac{\delta F_{(1)}}{\delta \omega_i^\alpha}\,{}_2\omega^\alpha + \ldots + F\omega^{(i)},$$

где

$${}_2\omega^\alpha \equiv \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial \tau} \quad \text{и} \quad \omega^{(i)} \equiv \left(\frac{\partial X^i}{d\tau}\right)_x$$

($\left(\frac{dX^i}{d\tau}\right)_x$ обозначает полную производную по τ от сложной функции $X^i[x^j, y^\alpha(x^j, \tau), \tau]$ при постоянном x^j).

Отсюда

$$F_{(2)} = \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta \omega^\alpha}\,{}_2\omega^\alpha +$$

$$+ \frac{d}{dx^i}\left(F_{(1)}X^i + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y_i^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta y_{ij}^\alpha}\omega_i^\alpha + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta F_{(1)}}{\delta \omega_i^\alpha}\,{}_2\omega^\alpha + \ldots + F\omega^{(i)}\right).$$

Для сравнения вторая вариация в случае $F(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha)$ вычисляется прямо и показывается ее совпадение с результатом, полученным операторным методом.

Г. И. Жотиков

4076. Вырожденная задача Больца. Фокнер (A degenerate problem of Bolza. Faulkner Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 847—854 (англ.)

Кривая C называется допустимой, если она удовлетворяет условиям: 1) вдоль C удовлетворяется уравнение $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ (которое используется автором в виде $dz = K(x, y, z)\,dx$); 2) вдоль C переменная x монотонно не. убывает; 3) концы C лежат на многообразиях

$$G_i(x, y, z) = 0, \quad H_i(x, y, z) = 0;$$

число функций G может равняться 1, 2, 3; число функций H может равняться 0; 1 или 2.

Среди допустимых кривых требуется найти ту, которая реализует минимум функции $f(x, y, z)$. Доказывается, что искомая кривая C^* с концами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) должна удовлетворять условиям:

C^* имеет уравнение $y = y^*(x, z)$, $(x_1 < x < x_2)$, а также

$$dz_1 - K[x_1, y^*(x_1, z_1), z_1]\,dx_1 = 0,$$

$$G_i(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$dz = K(x, y, z)\,dx,$$

$$\{f_{x_2} + f_{z_2}K[x_2, y^*(x_2, z_2), z_2]\}\,dx_2 + f_{y_2}dy_2 = 0,$$

$$H_i(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

Дается геометрическая интерпретация семейства экстремалей. Рассматриваются также особые случаи задачи и случай, когда оба конца экстремали лежат на одном многообразии. М. К. Керимов

4077. Смешанные краевые задачи для уравнений вариационного исчисления. Стампакья (Problemi al contorno misti per equazioni del calcolo delle variazioni. Stampacchia Guido), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 193—209 (итал.)

Развернутое изложение результатов, доложенных на Международном математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 г. (РЖМат, 1955, 3253). М. К. Керимов

4078. О задаче, связанной с плотиной минимального объема. Фаэдо (Sul problema della diga a gravità di minimo volume. Faedo Sandro), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1953, 7, № 3—4, 219—275 (итал.)

Работа посвящена детальному математическому исследованию следующей важной (не только с практической, но и с теоретической стороны) задачи: среди всех твердых тел, способных выдержать напор данной массы жидкости, определить тело наименьшего объема. Задача возникает из практики построения гидротехнических сооружений и относится к типу вариационных задач, не рассмотренных ранее.

На плоскости α, отнесенной к ортогональной декартовой системе координат x и y (ось x имеет горизонтальное, а ось y — вертикальное направление), рассматривается простая спрямляемая замкнутая кривая C, проходящая через фиксированную точку $H(0, h)$, $h > 0$, и являющаяся границей некоторой области $D(C)$.

Уравнения C: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, s — длина дуги, начало отсчета в точке H, $x(s)$, $y(s)$ — абсолютно непрерывные функции. Через K обозначим класс кривых C, удовлетворяющих условиям: $x(0) = 0$, $y(0) = h$, $x(l) = 0$, $y(l) = h$, $y(s) \geqslant 0$ для $0 \leqslant s \leqslant l$; существуют числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \leqslant l$, для которых $y(s) \equiv 0$, $\sigma_1 \leqslant s \leqslant \sigma_2$; $y(s) > 0$ $0 \leqslant s < \sigma_1$, $s > \sigma_2$; $y(s) < h$, $\sigma_2 < s < \sigma_3$; $y(\sigma_3) = h$. Через K_1 обозначим подкласс класса K, кривые которого удовлетворяют еще некоторому интегральному соотношению.

В первой части рассматривается вариационная задача 1: В подклассе K_1 найти кривую C, дающую

минимум функционала $D(C)$. Доказывается, что эта задача не имеет решения (это обстоятельство объясняется несоответствием сделанных математических допущений физическим условиям — плотина сделана из абсолютно твердого тела и не имеет конечных размеров).

Далее рассматривается случай плотины конечных размеров. Через K_1^L обозначим класс кривых из K_1, которые заключены в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant c$; $a < 0 < b$, $c > h$.

Задача 2: В классе K_1^L найти кривую C, дающую минимум функционала $D(C)$. Для этой задачи находятся необходимые условия минимума в предположении, что минимум существует. В этом случае то же решение может не существовать.

Во второй части рассматривается случай, когда плотина сделана из прочного материала (стенной материал). Вводится некоторый широкий класс K_δ кривых C, удовлетворяющих условиям, гарантирующим равновесие пустого бассейна и исключающим профили, не подходящие с точки зрения их конструкций. Вводится понятие кривой давления

$$\Gamma\colon\ x = \gamma(y),\ 0 \leqslant y < h.$$

В случае равновесия плотины кривая давления должна быть расположена внутри области $D(C)$. Каждой кривой C класса K_δ соответствует кривая давления Γ, расположенная в области $D(C)$.

Детально изучаются свойства кривых Γ_z в зависимости от свойств соответствующих кривых C. Далее доказывается, что в классе K_δ существует минимум функционала $D(C)$. Введя понятие степени надежности плотины по отношению к разрушению (обозначается через r_0), автор показывает, что в случае $r_0 > 1$ имеется устойчивое равновесие, при $r_0 < 1$ — разрушение плотины и при $r_0 = 1$ — предельное равновесие.

Доказывается, что при фиксированном $r_0 \geqslant 1$ в некотором подклассе кривых C класса K_δ, для которых $D(C)$ имеют степени надежности по отношению к разрушению $\geqslant r_0$, есть такая кривая C, для которой $D(C)$ принимает минимальное значение.

В конце статьи рассматривается случай плотины с наименьшим весом. В этом случае задача сводится к нахождению минимума функционала

$$P(C) = \text{вес}\, D(C) = \iint_{D(C)} p(x, y)\, dx\, dy,$$

где $p(x, y)$ — удельный вес материала. Доказывается, что минимум функционала $P(C)$ в классе K_δ существует. М. К. Керимов

4079. **Необходимые условия минимума для задачи, связанной с плотиной минимального объема. Фаэдо** (Conditions nécessaires pour le minimum dans le problème de la digue à gravité de moindre volume. Faedo Sandro), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 98 (франц.)

Краткое резюме доклада, посвященного дальнейшему развитию теории задачи, приведенной в заглавии (см. реф. 4078). М. К. Керимов

См. также: 4347

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4080. **О построении изображений кусочно-непрерывных функций. Романовский В. Б.,** Сб. тр Ленингр. электротехн. ин-та связи, 1956, вып. 1, 9—15

На основании теоремы запаздывания в операционном исчислении дается методика построения изображений кусочно-непрерывных и кусочно-монотонных функций. Рассматриваются примеры. И. В. Матвеев

4081. **О двух вопросах, поставленных Карамата.** Делаж (Sur deux questions posées par M. Karamata. Delange Hubert), Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1954, 7, 69—80 (франц.)

Работа посвящена ответу на два вопроса, предложенных автору Карамата:

1. Пусть $f(x)$ — действительная или комплексная функция, определенная для $x \geqslant x_0$. Предположим, что для каждого $t > 0$ разность $|f(x+t) - f(x)|$ ограничена для $x \geqslant x_0$. Можно ли утверждать, что для любого $h > 0$ эта разность равномерно ограничена относительно t для $0 \leqslant t \leqslant h$?

2. Пусть $f(x)$ действительна и пусть для каждого $t > 0$ разность $f(x+t) - f(x)$ ограничена сверху для $x \geqslant x_0$. Можно ли утверждать, что для любого $h > 0$ это имеет место равномерно относительно t для $0 \leqslant t \leqslant h$?

Автор показывает, что на первый вопрос ответ утвердительный, если только $f(x)$ имеет лишь разрывы первого рода.

На второй вопрос ответ отрицательный, даже если $f(x)$ непрерывна, что показано при помощи надлежащего примера. В связи со вторым вопросом доказана следующая теорема:

Пусть $f(x)$ — действительная функция, определенная для $x \geqslant x_0$ и имеющая разрывы только первого рода. Предположим, что для каждого $t > 0$

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}}\ [f(x+t) - f(x)] < +\infty.$$

Тогда каковы бы ни были h_1 и h_2, для которых $0 < h_1 < h_2$, существует положительное число $N(h_1, h_2)$ такое, что для $x \geqslant x_0$ и $h_1 \leqslant t \leqslant h_2$

$$f(x+t) - f(x) \leqslant N(h_1, h_2).$$

Б. М. Левитан

4082. **К проблеме алгебраических моментов. Маммана** (Sul problema algebrico dei momenti. Mammana Carmelo), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1954, 8, № 3—4, 133—140 (итал.)

Проблема алгебраических моментов состоит в том, чтобы построить на оси x n различных вещественных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и определить соответственно n положительных чисел (массы) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ так, чтобы результат удовлетворял $2n$ соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k = \mu_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

где $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n-1}$ — заданные действительные числа (моменты порядка $0, 1, \ldots, 2n-1$). Пусть

$$D_0 = \mu_0;\quad D_k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \ldots & \mu_{2k} \end{vmatrix}.$$

Доказано: 1. Для того чтобы проблема алгебраических моментов имела решение, необходимо и достаточно, чтобы все $D_k > 0$. 2. Найдены условия, которым должны удовлетворять μ_k, чтобы решения x_i были бы $\geqslant a$ или $\leqslant b$, где a и b — заданные вещественные числа. К. М. Слепенчук

4083. Обобщение одной формулы Эскотта для квадратных корней. Серпинский (Généralisation d'une formule de E. B. Escott pour les racines carrées. Sierpinski W.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 12, 520—529 (франц.)

Устанавливается существование и единственность разложения действительного числа $x > 1$ в бесконечное, быстро сходящееся произведение

$$x = \left(1 + \frac{2}{k_1 - 1}\right)\left(1 + \frac{2}{k_2 - 1}\right) \cdots \qquad (1)$$

$k_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $k_{n+1} \geqslant k_n^2 - k_n$. Каждое k_n — наименьшее натуральное число такое, что $x_{n-1} > 1 + 2/(k_n - 1)$, если ввести в рассмотрение числа $x_n\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$, определяемые соотношениями: $x_0 = x$, $x = (1 + 2/(k_1 - 1))(1 + 2/(k_2 - 1)) \ldots (1 + 2/(k_n - 1))\,x_n$; $x_n > 1$. Разложение (1) — обобщение известной формулы Эскотта, представляющей $\sqrt{(k+2)/(k-2)}$ в виде бесконечного произведения. Приведены примеры разложений и оценки точности. Для рациональных $x > 1$ разложение (1) характеризуется существованием такого натурального s, что при $n \geqslant s$, $k_{n+1} = k_n^2 - k_n$. В заключение автор приводит результаты некоторых своих предыдущих работ.

А. И. Взорова

4084. Распределение независимых и ограниченных экстремальных точек в плоских множествах. Лея (Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans. Leja F.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 147—156 (франц.)

Пусть E — какое-либо множество на плоскости; $\zeta^{(n)} = \{\zeta_n\}$ — система n точек: $\zeta_k \in E\,(k = 1, 2, \ldots, n \geqslant 2)$; $v(\zeta^{(n)}) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} |\zeta_j - \zeta_k|$ и $v_n(E) = \sup_{\zeta^{(n)}} v(\zeta^n)$. Известно, что если E — ограниченное множество, то существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} [v_n(E)]^{2/n(n-1)} = d(E)$, называемый трансфинитным диаметром (ранга n) множества E. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, пересечение $E_1 \cap E_2$ пусто, $\zeta^{(2n)} = \{\zeta_k\}$, $\zeta_k \in E_1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\zeta_k \in E_2$ при $k = n+1, \ldots, 2n$, $v_{2n}(E_1, E_2) = \sup_{\zeta^{(2n)}} v(\zeta^{(2n)})$. Показывается при предположении ограниченности и замкнутости множеств E_1 и E_2, что существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} [v_{2n}(E_1, E_2)]^{2/2n(2n-1)} = v(E_1, E_2).$$

Доказываются два свойства величины $v(E_1, E_2)$: 1) Если трансфинитный диаметр хоть одного из ограниченных замкнутых множеств E_1 и E_2 равен нулю, то $v(E_1, E_2) = 0$. 2) Если $0 < d(E_1) \leqslant d(E_2)$, E_1 и E_2 — ограничены и замкнуты, то

$$[d(E_1)]^{1/4}\,[d(E_2)]^{3/4} \leqslant v(E_1, E_2) \leqslant d(E_1 \cup E_2).$$

Даются обобщения на случай, когда E_1 и E_2 — незамкнутые множества, и для разбиения E на произвольное конечное число ограниченных замкнутых множеств. Л. Д. Кудрявцев

4085. Замечание о равномерно распределенных последовательностях. Кеннеди (A note on uniformly distributed sequences. Kennedy P. B.), Quart J. Math., 1956, 7, № 26, 125—127 (англ.)

Пусть $\{x_n\}$ — равномерно распределенная последовательность в интервале $(0, 1)$. Тогда $x_n \to \frac{1}{2}\ (C, 1)$ и, так как $\lim_{n \to \infty} x_n$ не существует,

$$\overline{\lim}_{n \to \infty}\, n\,|\Delta x_n| = +\infty$$

(Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., М., 1951, §§ 5.17, 6.1).

Известно, что последний результат не может быть улучшен для класса всех расходящихся последовательностей, суммируемых методом $(C, 1)$ (Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1911, 2(9) 434—448). Автор устанавливает, что это заключение остается в силе даже для класса всех равномерно распределенных последовательностей. Именно, доказана теорема: Какова бы ни была последовательность $\Phi(n) \to \infty$, $n \to \infty$, существует последовательность $\{x_n\}$, равномерно распределенная в $(0, 1)$, такая, что $n\Delta x_n = O\{\Phi(n)\}$. Г. П. Сафронова

4086. Вопросы обоснования и обобщения понятия предела. Галетов (Питання обгрунтування та узагальнення поняття границі. Галетов І. П.), Наук. зап. Мелітопольск. держ. пед. ін-т, 1956, 3, 5—40 (укр.; рез. русск.)

4087. Некоторые мысли об арифметическом, геометрическом и гармоническом среднем. Бёрма (Einige Gedanken zum arithmetischen, geometrischen und hartmonischen Mittel. Boerma E.), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 123—127 (нем.)

4088. О неравенстве между средними арифметическим и геометрическим. Йосида (Sur l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géometrique. Yosida Yôiti), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 1, 1—2 (франц.)

4089. О некоторых тождественных соотношениях, встречающихся при решении уравнения Чандрасекхара и Мюнха. Борселлино (Su alcune identità che intervegono nella risoluzione della equazionne di Chandrasekhar e Münch. Borsellino Antonio), Mem. Soc. astron. ital., 1955, 26, № 2, 189—192 (итал.)

Изучена функция $F_h = D_h/D_n$, где D_n — определитель Вандермонда, составленный из элементов $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$;

$$D_h = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ q_0^2 & q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_0^{n-1} & q_1^{n-1} & q_2^{n-1} & \ldots & q_n^{n-1} \\ q_0^h & q_1^h & q_2^h & \ldots & q_n^h \end{vmatrix} \qquad (1)$$

В (1) предполагается $h < n$, поскольку $D_h = 0$ при $0 \leqslant h \leqslant n-1$.

Указано, что функция $p(n, \varepsilon)$, полученная в работе Рамакришнана и Матьюса (РЖАстр, 1954, 5682) при решении уравнения Чандрасекара и Мюнха из теории флюктуаций яркости Млечного Пути применением к нему преобразования Меллина, может быть записана в виде

$$p(n, \varepsilon) = n!\, e^{-\varepsilon} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(n+r)!}\, w_r \varepsilon^r,$$

где $w_m = F_{m+n}$ (w_n — функция Вронского). И. Н. Минин

4090. О распределении классов собственно ассоциированных матриц, представленных положительно определенной матрицей. Рёльке (Über die Verteilung der Klassen eigentlich assoziierter zweireihiger Matrizen, die sich durch eine positiv-definite Matrix darstellen lassen. Roelcke W.), Math. Ann., 1956, **131**, № 3, 260—277 (нем.)

Пусть Q — симметрическая унимодулярная (с определителем $+1$) положительно определенная матрица порядка m подкольца целых чисел, все диагональные элементы которой являются четными числами. Для любой положительно определенной матрицы второго порядка обозначим через $a(T)$ число представлений матрицы T в виде $G'QG$, где G — произвольная целочисленная матрица, состоящая из m строк и двух столбцов.

Пусть далее P — множество всех положительно определенных матриц второго порядка и F — фундаментальная область группы преобразований $T \to U'TU$, где U — унимодулярная целочисленная матрица, действующая в множестве P.

Известно, что область F является конусом, ограниченным конечным числом поверхностей. Для любого конуса V, лежащего в области F, обозначим через $|V|$ площадь пересечения конуса V с поверхностью $|T| = 1$ (площадь измеряется в метрике Лобачевского, естественно определенной на поверхности $|T| = 1$).

Основным результатом работы является асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{|T| \leqslant q^2 \\ T \in V}} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \sim \frac{|V|}{|F|} \frac{(4\pi q)^m}{12m\Gamma(m-1)} \quad \text{при } q \to \infty,$$

где $\varepsilon(T)$ — число единиц матрицы T.

И. И. Пятецкий-Шапиро

4091. Система функциональных уравнений. Цюй-Пэй-чжан (一組函數方程. 邱佩璋), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 2, 263—269 (кит.; рез. англ.)

Пусть $B_k^l \equiv \frac{(l+k)!}{(l-k)!\,k!\,z^k}$ — k-й коэффициент бесселева полинома степени l,

$$y_l(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)!\,k!\,z^k} x^k.$$

Изучение уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу при помощи преобразований Фурье навело нас на мысль изучить следующую систему функциональных уравнений:

$$F_{l+1/2}(x) F_{-l-1/2}(\xi) - F_{l+1/2}(\xi) F_{-l-1/2}(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k B_k^l \left(\frac{x-\xi}{x\xi}\right)^{k+1/2} F_{k+1/2}(x+\xi),$$

$$F_{-l-1/2}(x) F_{-l-1/2}(\xi) - F_{l+1/2}(x) F_{l+1/2}(\xi) =$$

$$= (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{l} B_k^l \left(\frac{x+\xi}{x\xi}\right)^{k+1/2} F_{-k-1/2}(x+\xi),$$

$$F_{l+1/2}^2(x) + F_{-l-1/2}^2(x) = 2/\pi \sum_{k=0}^{l} B_k^l B_k^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k+1/2};$$

с дополнительными условиями

$$\lim_{x \to 0} \frac{F_{l+1/2}(x)}{x^{l+1/2}} = \sqrt{2/\pi} \left\{(2l+1) B_l^l\right\}^{-1};$$

$$x^{l+1/2} F_{-l-1/2}(x) = O(1),$$

где $l = 0, 1, \ldots, n$.

Доказывается, что в интервале $0 < x < +\infty$ система имеет одно и только одно множество решений $\left\{J_{\pm(l+1/2)}(x)\right\}$ функций Бесселя с индексами вида $\pm(l+1/2)$, где l — неотрицательные числа.

Резюме автора

4092. Уравнения в конечных разностях. Гермэнеску (Ecuaţii cu diferenţe finiţe. Gheremănescu M.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A8**, № 6, 282—296 (рум.)

Обзорная статья, посвященная основным свойствам решений уравнения

$$A_0(x) f(x+p) + A_1(x) f(x+p-1) + \ldots + A_p(x) f(x) = 0,$$

а также системам уравнений первого порядка аналогичного вида; приводятся краткие обоснования сформулированных утверждений. Материал близок §§ 2—4 гл. V книги А. О. Гельфонда «Исчисление конечных разностей» (М.—Л., ГТТИ, 1952). Для линейных однородных или неоднородных уравнений 1-го порядка приводятся формальные ряды, которые в случае сходимости дают решение. Местами изложение недостаточно точное: так, не уточняется интервал, в котором ищется решение, не приведены предположения о коэффициентах $A_0(x)$ и $A_p(x)$, без чего утверждения могут потерять силу; рассматриваемый случай $k < p$ пояснен недостаточно.

А. Д. Мышкис

4093. О дифференцируемости неявных функций. Островский (Über die Differenzierbarkeit von impliziten Funktionen. Ostrowski Alexander), Verhandl. Naturfosch. Ges. Basel, 1956, **67**, № 2, 141—148 (нем.)

Говорят, что функция $f(v_1, \ldots, v_\mu)$ в точке (v_μ^0) принадлежит классу $L_\varkappa (\varkappa > 0)$, если в достаточно малой окрестности этой точки выполняется неравенство

$$\left|f(v_\mu) - f(v_\mu^0)\right| \leqslant c \left(\sum\nolimits_\mu \left|v_\mu - v_\mu^0\right|\right)^\varkappa.$$

Функция принадлежит классу $l_\varkappa (\varkappa > 0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует столь малая окрестность, что в ней

$$\left|f(v_\mu) - f(v_\mu^0)\right| \leqslant \varepsilon \left(\sum\nolimits_\mu \left|v_\mu - v_\mu^0\right|\right)^\varkappa.$$

Теорема. Пусть n функций $u_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ непрерывны и в окрестности этой точки удовлетворяют соотношению $F(u_\nu; x_\mu) = 0$, причем производные $F'_{x_\mu}(u_\nu; x_\mu)$ существуют и непрерывны в окрестности $(m+n)$-мерной точки $R_0(u_\nu^0; x_\mu^0)$ (где u_ν^0 суть значения u_ν в точке P_0); предполагается также существование и непрерывность производных $F'_{u_\nu}(u_\nu; x_\mu^0)$ в окрестности точки $Q_0(u_\nu^0)$.

Пусть, наконец, выполнено одно из двух условий:

A. Все u_ν принадлежат классу l_α, при $0 < \alpha < 1$, в точке P_0, а производные $F'_{u_\nu}(u_\nu; x_\mu^0)$ — классу $L_{(1/\alpha)-1}$ в точке Q_0.

B. Все u_ν принадлежат классу L_α, при $0<\alpha<1$, в точке P_0, а производные $F'_{u_\nu}(u_\nu;\ x^0_\mu)$ — классу $l_{(1/\alpha)-1}$ в точке Q_0. (Конечно, при $\alpha<1/2$ все $F_{u_\nu}(u^0_\nu;\ x^0_\mu)=0$, так как тогда $(1/\alpha)-1>1$).

Тогда, если обозначить значения производных F'_{x_μ}, F'_{u_ν} в точке R_0 соответственно через $F^0_{x_\mu}$, $F^0_{u_\nu}$, то выражение

$$\sum_{\nu=1}^{n} F^0_{u_\nu} u_\nu$$

в точке P_0 имеет дифференциал (в смысле Штольца), и

$$d\sum_{\nu=1}^{n} F^0_{u_\nu} u_\nu = -\sum_{\mu=1}^{m} F^0_{x_\mu} dx_\mu.$$

Выясняются возможности обобщения классов L_α и l_α в условиях *A* и *B*. Г. М. Фихтенгольц

4094. Разложение конечной разности от функции по разностям от ее производных. Милошевич (Разлагање коначне разлике функције по разликама њених извода. Милошевић Ковина), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1955, 6, 5—8 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Доказывается, что коэффициенты

$$A_{n\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int_0^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}dt$$

формулы

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=h^n\sum_{\rho=0}^{r}A_{n\rho}\Delta^\rho f^{(n)}(a)+R_{nr},\qquad(1)$$

полученной Микеладзе, могут быть выражены в форме

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{k=0}^{\rho}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{m=k}^{\rho}\frac{m!}{(m+n-k)!}S^m_\rho\sigma^n_{m+n-k},$$

где S^m_n и σ^n_m — числа Стирлинга первого и второго рода. После этого вычисление коэффициентов $A_{n\rho}$ может быть осуществлено с помощью вычисленных чисел Стирлинга. В частном случае $\lambda=0$ показано, что формула (1) с

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}S^m_\rho\sigma^n_{m+n}$$

есть непосредственное следствие хорошо известных соотношений конечных разностей. Резюме автора

4095. Теоремы о суммировании производных разложений в обычный и обобщенный интеграл Фурье. Саргсян И. С., Докл. АН АрмССР, 1956, 23, № 1, 3—10 (рез. арм.)

Пользуясь одной теоремой Б. М. Левитана (Матем. сб., 1954, 35 (77), № 2, 267—316), автор устанавливает, что если: 1) $f(x)\in L_2(0,\infty)$, 2) в некоторой окрестности данной точки x_0 производная $f^{(k)}(x)$ существует и суммируема, 3) в точке x_0 производная $f^{(k)}(x)$ непрерывна, — то производная k-го порядка разложения $f(x)$ в обычный интеграл Фурье в точке x_0 суммируется средними М. Рисса k-го порядка к $f^{(k)}(x_0)$.

Аналогичная теорема доказана и для обычных рядов Фурье. Приводится также обобщение на другие разложения по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля. Автор обращает внимание на ошибку, имеющуюся в его предыдущей работе (РЖМат, 1956, 6565). Имеются опечатки.

А. Ф. Тиман

4096. Формула Тейлора для многочлена одной переменной. Коммо (La formule de Taylor pour un polynôme à une variable. Commeau M. J.), Rev. math spéc., 1956, 66, № 11, 261 (франц.)

Выводится формула Тейлора для многочлена.

И. В. Матвеев

4097. Разложения $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$. Висенти-Гонсалвиш (Les développements de $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$. Vicente Goncalves J.), Rev. Fac. ciênc Univ. Lisboa, 1954—1955, A3, № 2, 331—332 (франц.)

Предполагая справедливым равенство

$$f(x)=f(\alpha x)+g(x),\ 0\leqslant x<a,\ 0<\alpha<1,$$

элементарно доказывается формула

$$f(x)=f(\alpha^{n+1}x)+\sum_{i=0}^{n}g(\alpha^i x).\qquad(1)$$

Если $f(x)$ непрерывна при $x=0$, из (1) следует

$$f(x)=f(0)+\sum_{i=0}^{\infty}g(\alpha^i x).\qquad(2)$$

Положив здесь $g(x)=-\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $f(x)=x\cot x=$ $=\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ и считая известным разложение $\operatorname{tg}x$ в степенной ряд, из формулы (2) автор получает разложение $x\cot x$ в степенной ряд.

И. В. Матвеев

4098. Основные теоремы дифференциального исчисления 2-х переменных. Чэнь Си-чжэнь (微分學基本定理類推于兩變數情形. 陳熙震), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1956, № 66, 1—5 (кит.)

4099. Некоторые определенные интегралы. Хуа Ло-гэн (幾個定積分. 華羅庚), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 2 302—312 (кит.; рез. англ.)

Косвенно было доказано, что для n ($\geqslant 3$), m, n — действительные числа, имеет место следующее равенство

$$\int\cdots\int_{\substack{|zz'|<1\\ 1+|zz'|^2-2zz'<0}}|zz'|^{2l+m}P_m^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\left(\frac{z\bar z'}{|zz'|}\right)\dot z=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\frac{(n-3+m)!}{(n-3)!\,m!}\,\frac{l!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)},\qquad(1)$$

где z есть вектор с n комплексными компонентами,

$$zz'=\sum_{i=1}^{n}z_i^2,\ z\bar z'=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2,$$

а $P_m^{(\gamma)}(t)$ есть ультрасферический полином степени m. Целью статьи является непосредственное доказательство равенства (1).

Прежде всего мы сводим (1) к простому интегралу, который является специальным случаем следующего результата: пусть s — комплексное число с действительной частью $>m+2\lambda$, где λ — действительное число $>-\frac{1}{2}$. Тогда мы имеем

$$\int_0^\infty e^{-zs}\,(\sinh x)^{2\lambda}P_m^\lambda\cosh x)\,dx=$$

$$=\frac{s\lambda\,\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-m)-\lambda\right)\Gamma(2\lambda+m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+m)\right)}{2^{2\lambda+1}\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-m)+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+m)+\lambda+1\right)}.$$

Из резюме автора

4100. Замечания относительно теоремы Харди и Литтлвуда о максимуме. Флетт (Some remarks on a maximal theorem of Hardy and Littlewood. Flett T. M.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 24, 275—282 (англ.)

Дается новое доказательство известной теоремы Харди и Литтлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Acta math., 1930, 54, 81—116), утверждающей, что при $f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, $p > 1$ и $\Theta(x) = \Theta(x, f) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \left\{ \frac{1}{x-\xi} \int_\xi^x f(t)\, dt \right\}$ имеет место неравенство

$$\int_a^b \Theta^p(x)\, dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b f^p(x)\, dx.$$

Доказательство использует идею Винера (Wiener N., Duke Math. J., 1939, 5, 1—18). Далее устанавливается неравенство

$$\int_a^b \Theta(x)\, dx \leqslant \frac{1}{1-k} \int_a^b f(x) \log^+ f(x)\, dx + \frac{1}{k}(b-a) \quad (0 < k < 1).$$

Аналогичные вопросы рассматриваются для двумерного случая (Burkill J. C., J. London Math. Soc., 1951, 26, 244—249). Б. И. Коренблюм

4101. Обобщение одного интегрального неравенства. Ильин В. П., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 131—138

Обобщается интегральное неравенство Гильберта—Рисса (Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, М., Изд-во ин. лит., 1948).

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n)$ суммируема по всему пространству переменных со степенью $p > 1$, а $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ суммируема по пространству m переменных со степенью $q > 1$, где $1/p + 1/q > 1$, $m \leqslant n$. Тогда

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n+m} \frac{f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) \cdot g(y_1, \ldots, y_m)}{r^\lambda} \times$$

$$\times\, dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m \leqslant K(m, n, p, q) \times$$

$$\times \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p\, dx_1 \ldots dx_n \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{m} |g(y_1, \ldots, y_m)|^q\, dy_1 \ldots dy_m \right]^{1/q}, \qquad \text{где}$$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2}, \qquad \lambda = n/p' + m/q',$$

$1/p + 1/p' = 1$; $1/q + 1/q' = 1$, $K(m, n, p, q)$ — постоянная, не зависящая от f и g. Дается оценка $K(m, n, p, q)$. Для $m = n$ это неравенство было доказано С. Л. Соболевым (Матем. сб., 1938, **4 (46)**, вып. 3).

Отсюда получается:

1. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ суммируема по всему n-мерному пространству со степенью $p > 1$. Тогда функция

$$U(y_1, \ldots, y_m) = \overbrace{\int \cdots \int}^{n} \frac{f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n)}{r^\lambda}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $n > \lambda > n/p$ $(1/p' + 1/p = 1)$, $m > n - (n - \lambda) \cdot p$, суммируема по всему пространству m переменных со степенью $q' = \frac{m}{\lambda - n/p'}$, причем

$$\| U \|_{L_{q'}}^{(m)} \leqslant K(m, n, p, q) \cdot \| f \|_{L_p}^{(n)}.$$

2. Если $lp < n$, то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ суммируема со степенью q' по любому сечению области D гиперплоскостью размерности m, где $m > n - lp$, $q' = \frac{mp}{n - lp}$. Последнее предложение не доказано.

К. М. Слепенчук

4102. О некоторых функциональных уравнениях. Курепа (On some functional equations. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, **11**, № 1, 3—5 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Рассматриваются функциональные уравнения

$$f(x_1 + x_2) = f(x_2) + f(x_1); \tag{1}$$

$$f(x_1 + x_2, x_3) + f(x_1, x_2) = f(x_2, x_3) + f(x_1, x_2 + x_3); \tag{2}$$

$$f(x_1 + x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3 + x_4) = f(x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2 + x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3); \tag{3}$$

$$f(x_1 + x_2, x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3, + x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_2, x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2 + x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5). \tag{4}$$

Доказывается, что функции

$$f(x) = ax; \tag{I}$$

$$f(x_1, x_2) = [G(x_1 + x_2) - G(x_2) - G(x_1)] + a; \tag{II}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = [G(x_1 + x_2, x_3) + G(x_1, x_2) - G(x_1, x_2 + x_3) - G(x_2, x_3)] + [H(x_1 + x_2) - H(x_2)] + ax_1; \tag{III}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [G(x_1 + x_2, x_3, x_4) + G(x_1, x_2, x_3 + x_4) - G(x_2, x_3, x_4) - G(x_1, x_2 + x_3, x_4) - G(x_1, x_2, x_3)] + [H(x_1 + x_2, x_3) - H(x_1, x_2 + x_3) - H(x_2, x_3)] + [K(x_1 + x_2) - K(x_2) - K(x_1)] + a, \tag{IV}$$

где a — произвольная постоянная и G, H, K — произвольные функции, являются некоторыми решениями соответствующих функциональных уравнений. При этом, если функции f в уравнениях (1)—(4) предполагаются дифференцируемыми, то решения этих уравнений необходимо имеют вид (I)—(IV).

А. Г. Школьник

4103. Заметка к теории поверхностного интеграла. Маржик Ян. Чехосл. мат. ж., 1956, **6**, № 3, 387—400 (рез. нем.)

Пусть $a_1, \ldots, a_{m-1}, a$ будут элементами (векторами) m-мерного арифметического пространства E_m. Если для каждого $x \in E_m$ скалярное произведение ax равно определителю со строками $a_1, \ldots, a_{m-1}, x$, то a называется внешним произведением векторов $a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi = \varphi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)] \quad (t = [t_1, \ldots, t_{m-1}])$$

открытого множества $G \subset E_{m-1}$ в E_m в предположении, что φ_j $(j = 1, \ldots, m)$ определены и непрерывны в G со своими частными производными 1-го порядка. Через $w(t)$ будем обозначать внешнее произведение векторов $\partial\varphi(t)/\partial t_1, \ldots, \partial\varphi(t)/\partial t_{m-1}$.

Возьмем $A \subset E_m$. Упомянутое отображение φ называется A-допустимым, если оно взаимно однозначно и если для каждого $t_0 \in G$ существует окрестность $U \subset G$

и число $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $t \in U$, лишь только $0 < \alpha < \varepsilon$, будет

$$\varphi(t) + \alpha w^{\varphi}(t) \bar{\in} A,\ \varphi(t) - \alpha w^{\varphi}(t) \in A.$$

Заметим еще, что для $x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m$ мы полагаем, как обычно, $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$ и вводим обозначение

$$\pi_k(x) = [x_1 \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m] \ (k = 1, \ldots, m).$$

Теперь основной результат работы вкратце может быть передан так:

пусть $m > 1$, $A \subset E_m$, H — граница A. Рассмотрим A-допустимые отображения φ_n открытых множеств $G_n \subset E_{m-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и предположим, что $\varphi_i(G_i) \cap \varphi_j(G_j) = \emptyset$ для $i \neq j$ и что $m-1$-мерная мера множества $\pi_k\left(H - \bigcup_n \varphi_n(G_n)\right)$ равна нулю для $k = 1, \ldots, m$. Пусть, наконец, $v = v(z) = [v_1(z), \ldots, v_m(z)]$ будет непрерывное отображение множества $\bar{A}$ (замыкания A) в E_m, имеющее следующие свойства:

1. Для каждой внутренней точки z множества A существуют конечные производные $\partial v_k(z)/\partial z_k$ $(k = 1, \ldots, m)$.

2. Существуют конечные лебеговы интегралы

$$\int_A \frac{\partial v_k(z)}{\partial z_k}\, dz \quad (k = 1, \ldots, m).$$

3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое C, что $|v(z)| < \varepsilon$ для $z \in A$ и $|z| < C$ (в частности, это выполняется, если множество A ограничено).

4. $$\sum_n \int_{G_n} |v(\varphi_n(t))| \cdot |w^{\varphi_n}(t)|\, dt < \infty.$$

При этих предположениях будет

$$\int_A \operatorname{div} v(z)\, dz = \sum_n \int_{G_n} v(\varphi_n(t)) w^{\varphi_n}(t)\, dt.$$

Эта формула является аналогом известной интегральной формулы Гаусса-Остроградского. Ее правая часть показывает, каким образом можно для некоторых множеств определить поверхностный интеграл.

Г. М. Фихтенгольц

4104. О теореме Стокса. Неванлинна (Über den Satz von Stokes. Nevanlinna Rolf. Suomalais tiedeakat. toimituks, 1956, Sar. A-I, № 219, 24 S.) (нем.)

Рассматривается линейное пространство L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Точки этого пространства обозначаются через x, разности $h = x - x_0$ называются векторами. Симплекс, лежащий в этом пространстве, обозначается s_n. Вершины симплекса $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n \leqslant p)$.

На протяжении всей статьи автор рассматривает произвольную, но фиксированную, кососимметрическую (альтернирующую) полилинейную форму векторов $h_1, \ldots, h_n$, заданную на симплексе s_n, которая обозначается $Dh_1 \ldots h_n$.

При помощи этой формы вводится ориентация симплекса s_n.

Для всякой другой полилинейной непрерывной формы этих же векторов h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ устанавливается формула $A(x) h_1 \ldots h_n = a(x) Dh_1 \ldots h_n$, где $a(x)$ определена и непрерывна для $x \in s_n$.

Используя понятие дифференцируемой формы $Z = A(x) h_1 \ldots h_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, автор устанавливает дифференциальную форму $dA'(x) h_1 \ldots h_m h_{m+1}$, соответствующую дифференциалу $dx = h_{m+1}$. Понятие дифференциальной формы в статье не определено, читатель отсылается к статьям автора (РЖМат, 1955, 1373; 1957, 2257).

Затем дается определение вихря формы A и для него вводится обозначение $\operatorname{rot} Ah_1 \ldots h_n = \operatorname{rot} A$ и доказывается, что

$$\operatorname{rot} A = (-1)^m \hat{A}'(x) h_1 \ldots h_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \sum \pm A' h_1 \ldots h_{m+1},$$

где суммирование производится по всем перестановкам и знак $+$ берется для четных, — для нечетных перестановок.

После этого выводится формула Стокса для симплекса:

$$\int_{s_{m+1}} \operatorname{rot} A d_1 x \ldots d_{m+1} x = \int_{\partial s_{m+1}} A d_1 x \ldots d_m x,$$

где ∂s_{m+1} — граница симплекса s_{m+1}. Для вихря устанавливается формула

$$\operatorname{rot}[A(x) h_1 \ldots h_m] = a(\bar{x}) Dh_1 \ldots h_{m+1},$$

где

$$a(\bar{x}) = \lim_{\bar{s}_{m+1} \to \bar{x}} \frac{1}{Dh_1 \ldots h_{m+1}} \int_{\partial \bar{s}_{m+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_{m+1} x.$$

Рассматриваются также интегралы, взятые по цепи дифференцируемых многообразий.

В заключительном параграфе автор занимается следующей задачей: G выпуклая область, принадлежащая L_p. В каждой точке $x \in G$ задано $y = A(x) h_1 \ldots h_n$, где $A(x)$ непрерывна в G, и для каждой x существует оператор $\operatorname{rot} A$. В этих предположениях решается уравнение $\operatorname{rot} X = A$.

Доказана теорема: Для решения уравнения $\operatorname{rot} X = A$, при сделанных предположениях, необходимым и достаточным условием является $\operatorname{rot} A = 0$. Если это условие выполнено, то для каждой точки $x = x_0 \in G$ существует один и только один альтернирующий дифференциал $X(x) h_1 \ldots h_{n-1}$, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{rot} X = A$ и такой, что

$$X(x) h_1 \ldots h_{n-1} = 0,$$

если векторы $h_1, \ldots, h_{n-1}$ и $x - x_0$ линейно зависимы.

Общее решение задачи представляется в виде $X(x) + \operatorname{rot} Y$, где $Y(x)$ — любой «$n-2$» линейный альтернирующий дифференциальный оператор, определенный в G и такой, что для него оператор rot rot имеет смысл.

А. Н. Черкасов

4105 К. Сообщение о книге Бурбаки: «Фундаментальные структуры анализа». Рёрль (Ein Bericht über N. Bourbaki, «Les structures fondamentales de l'analyse». Röhrl Helmut), Math.-phys. Semesterber., 1955, 4, № 3—4, 213—238 (нем.)

Подробный обзор содержания четырех книг «Элементов математики» Н. Бурбаки, посвященных теории множеств (кн. I), алгебре (кн. II), топологии (кн. III) и «теории функций действительного переменного» (кн. IV), понимаемой Н. Бурбаки в смысле элементов анализа (производные и примитивные, элементарные функции, дифференциальные уравнения, ряд Тейлора формула суммирования Эйлера—Маклорена и т. д.). На этом материале уже возможно показать основной замысел всего сочинения: исходя из общих представлений теории множеств, построить логически стройную современную систему изложения математики, включающую в себя органически и естественно все ее классические отделы.

А. Н. Колмогоров

4106 К. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. (Для ун-тов и пед. ин-тов). Изд. 3-е. Демидович Б. П. М., Гостехиздат, 1956, 511 стр., илл., 11 р. 10 к.

4107 К. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Демидович (Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică. Demidovici B. P. Trad. din limba rusă. București,

Ed. techn., 1956, 595 p., il.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 18, 679 (рум.)

4108 К. Сборник задач и теорем по дифференциальному и интегралному исчислению. I. Дифференциальное исчисление. Брадистилов (Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане. Ч. I. Диференциално смятане. 2. прераб. изд. Брадистилов Георги. София, Наука и изкуство, 1956, 427 стр., 13.10 лв.), Българ. книгоп., 1956, 60, № 6, 7 (болг.)

4109 К. Линейные неравенства и родственные системы. Кун, Таккер (изд.) (Linear inequalities and related systems. Ed. Kuhn H. W., Tucker A. W. (Ann. Math. Studies, № 38), Princeton, Univ. Press., 1956, 322 pp., ill.) (англ.)

4110 К. Новый и общий метод вычисления обобщенных интегралов; теория и практика, предназначенная для математиков, физиков и инженеров. Ван-Латем (Une méthode nouvelle et générale de calcul des intégrales généralisées, théorie et pratique à l'usage des mathématiciens, physiciens et ingénieurs. Van Laethem Marcel. Louvain—Paris, Nauwelaerts, 1956, x. 180 p., ill., 2100 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 37, 798 (франц.)

4111 К. Математический анализ. т. 1. Георгиев (Математичен анализ. Т. I. Георгиев Г. Ив. София, Наука и изкуство, 1955, 720 стр. 20. 30 лв.), Българ. книгопис, 1955, 59, № 12, 8 (болг.)

4112 К. Бесконечные последовательности, ряды и произведения. Учебник для вузов. Фрей (Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok. Egyetemi segédkönyv. Frey Tamás. Budapest, Tankönyvkiado, 1956, 204 l., 19, 50 ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 5, 153 (венг.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4113. Регулярность и расходящиеся ряды. Вернотт (Régularité et séries divergentes. Vernotte Pierre), Publs scient. et techn. Ministère air, 1953, № 282, 53, XI p. (франц.)

Книга представляет собой сокращенное изложение некоторых результатов, опубликованных автором в его предыдущих трудах (Vernotte P., Publs scient. et techn. Ministère air, 1947, № 207, 479, XVII p.; 1950, № 238, 278, VIII p.).

Автор вводит следующий принцип суммирования числовых рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Пусть $s(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям интерполяции $s(n) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Процесс интерполяции $s(n) \to s(x)$ называется идеальным, если в результате применения его к данным $g(s(n))$ получается функция $g(s(x))$. Под суммой ряда $\sum u_n$, сходящегося или расходящегося, понимается предел $\lim_{|x|\to\infty} s(x)$, значение которого объясняется в отдельных случаях по-разному.

Положим $y_n = \Delta^n u_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k$ и обозначим через $f(x)$ функцию, полученную путем идеальной интерполяции из условий

$$f(n) = y_n \; (n = 0, 1; \ldots). \qquad (1)$$

Тогда вышеизложенный принцип суммирования приводит, в частности, к определению суммы ряда $\sum u_n$ как результата экстраполяции $y_{-1} = f(-1)$. Это определение становится понятным, если иметь в виду, что функция $F(x) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)\, u_n/n!$ удовлетворяет условиям (1), причем формально $F(-1) = \sum u_n$.

В случае, когда члены ряда $\sum u_n$ удовлетворяют некоторым условиям, называемым автором условиями регулярности, даются простые формулы для приближенного вычисления y_{-1} и для оценки соответствующей погрешности. Если же условия регулярности не удовлетворяются, то используется так называемый метод замедления, состоящий в том, что величины y_n подвергаются, например, преобразованию $z_n = \sqrt[N]{y_n}$ и вычисляется тогда сумма s ряда $\sum u_n$ из формулы $s = z_{-1}^N$. Этим методом приближенно вычисляются суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n!$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n!^2$.

Для суммирования рядов $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n!^2$, которые вышеописанным методом не суммируемы, применяется другой метод замедления, связанный с известным интегралом Бореля.

Примечание референта. Автор реферируемой работы не уделяет должного внимания математической строгости своих рассуждений и доказательств. Некоторые понятия, введенные автором, явно вносят характер неопределенности (например, понятие о пределе $\lim_{|x|\to\infty} s(x)$, понятие об идеальной интерполяции и др.). Вследствие этого использование книги значительно затрудняется. Г. Ф. Кангро

4114. Некоторые тауберовы свойства преобразований Гёльдера. Якимовский (Some Tauberian properties of Hölder transformations. Jakimovski Amnon), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 354—363 (англ.)

Основной результат: Пусть $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ — пять действительных чисел, удовлетворяющих условиям $a + b = 1$, $\alpha < \beta < \gamma$, $0 \leqslant a$ и $a(\beta - \alpha) + b(\gamma - \alpha) > 0$. Тогда необходимые и достаточные условия для (H, α)-суммируемости последовательности $\{s_n\}$ суть:

1) $\lim_{n\to\infty} \left\{h_n^{(\alpha)} - \left[a h_n^{(\beta)} + b h_n^{(\gamma)}\right]\right\} = 0$ ($\left\{h_n^{(\delta)}\right\}$ — обозначает преобразование Гёльдера порядка δ данной последовательности $\{s_n\}$);

2) для некоторого $\delta > -1$ $\{s_n\}$ суммируема $A^{(\delta)}$, т. е.

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\;}{n} s_n x^n = s \quad (|s| < +\infty).$$

При доказательстве используется ряд свойств общих и специальных преобразований Хаусдорфа, а также теорема Питта о преобразованиях Меллина. Для случая $a = 1$, $b = 0$ теорема была установлена автором ранее (J. Analyse Math., 1953—1954, 3, 345—381).

Б. И. Коренблюм

4115. О теореме типа Абеля для степенных рядов. Ли Жун-хуа (關於冪級數的一個阿倍爾型定理. 李榮華), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 105—111 (кит.; рез. англ.)

Пусть $b_i \geqslant 0$, $\sum_0^{\infty} b_i = \infty$ и пусть $\sum_0^{\infty} b_i x^i$ будет степенным рядом радиуса 1, имеющим $x = 1$ своим полюсом m-го порядка. Тогда для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации на $[0, 1]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n a_i \Big/ \sum_0^n b_i = 1$$

всегда предполагает, что

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sum_0^\infty a_i x^i f(x^i)}{\sum_0^\infty b_i x^i} =$$

$$=\int_0^1\int_0^{tm-1}\cdots\int_0^t \frac{f(t)}{t_1 t_2\cdots t_{m-1}}\,dt\,dt_1\cdots dt_{m-1}.$$

В частности, если $a_i \geqslant 0$, тогда для любой функции, интегрируемой по Риману на $[0, 1]$, вышеупомянутое утверждение также имеет место при условии, что предел $f(0+)$ существует.

Этот результат включает в себя теорему А. Г. Постникова (РЖМат, 1955, 4509), а также, в некотором смысле, хорошо известный факт, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_0^n a_i \Big/ \sum_0^n b_i = 1$$

влечет за собой

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_0^\infty a_i x^i \Big/ \sum_0^\infty b_i x^i = 1.$$

Резюме автора

4116. Об одном методе суммирования. Ионеску-Циу (Asupra unei metode de însumare. Ionescu-Țiu C.), Gaz. mat. și fiz., 1956, A8, № 9, 464—466 (рум.)

Элементарные соображения о величине определенного интеграла. В. В. Немыцкий

4117. Об одном методе суммирования рядов. Соболев А. И., Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-та холодильн. пром-сти, 1956, 12, 49—57

Автор устанавливает следующее легко проверяемое по индукции тождество:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{u_1+z}+\frac{u_1}{(u_1+z)(u_2+z)}+\frac{u_1u_2}{(u_1+z)(u_2+z)(u_3+z)}+$$

$$+\ldots+\frac{u_1u_2\ldots u_{n-1}}{(u_1+z)(u_2+z)\ldots(u_n+z)}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n}{(u_1+z)(u_2+z)\ldots(u_n+z)}\cdot\frac{1}{z}.$$

Фиксируя z и задавая u_n, как функцию n, так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, автор получает значения сумм нескольких хорошо известных числовых рядов подобных, например, ряду $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$ (Гюнтер Н. М. Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, Гостехиздат, 1951, т. III, Отд. XII).

И. И. Огиевецкий

4118. Бесконечные матрицы в аналитическом пространстве. Хапланов М. Г., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 37—44

Рассматриваются так называемые аналитические пространства A_R и $\bar{A}_R$ точек $a(a_0, a_1, \ldots)$, координаты которых удовлетворяют условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant 1/R$, соответственно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}< 1/R$. Рассматриваются бесконечные матрицы линейных непрерывных операторов, преобразующих одно аналитическое пространство в другое или в $l^{(p)}$, и приводится признак того, чтобы оператор преобразовывал пространство A_R в A_1. Дается классификация матриц.

Результаты прилагаются к вопросу о базисе и полноте системы функций в различных классах аналитических функций. Если $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k f_k(z)$ — разложение функции $f(z)$, аналитической в круге $|z|<$ по функциям $f_k(z)$ базиса, то коэффициенты $(c_0, c_1, \ldots)=c$ удовлетворяют системе линейных уравнений $Mc=b$, где $(b_0, b_1, \ldots)=b$ — коэффициенты степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, а у матрицы M k-й столбец состоит из коэффициентов степенного ряда для $f_k(z)$. Предполагается, что множество всех точек c нормально, т. е. если ему принадлежит точка $c'(c'_0, c'_1, \ldots)$, то ему принадлежат и все точки $c(c_0, c_1, \ldots)$, для которых $|c_k|\leqslant|c'_k|$ $(k=0, 1, \ldots)$. Тогда базис также называется нормальным и утверждается, что базис будет нормальным тогда и только тогда, когда матрица M имеет единственную обратную.

Даются приложения к вопросам отыскания аналитических решений линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами, рассмотренных автором в другой работе (РЖМат, 1956, 7334). С. И. Зуховицкий

4119. Теорема относительно общих регулярных преобразований рядов. Эванс (A theorem on general regular transformations of series. Evans Arwel) Proc. Edinburgh Math., Soc., 1956, 9, № 3, 105—10 (англ.)

Пусть $f_m(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m)$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность вещественных функций от m переменных, заданных в интервале $a<s_k<b$ $(k=1, 3, \ldots, m)$. Пусть, кроме того, $f_m(s_1, \ldots, s_m)$ являются неубывающими функциями каждой из переменных в отдельности, за исключением, быть может, конечного числа этих переменных, не зависящего от m. Если при $m\to\infty$ и любом k, для всех $x\in(a, b)$ $s_n\in(a, b)$ $f_m(s_1, \ldots, s_k, x, \ldots, x)\to x$, то какой бы не была сходящаяся последовательность чисел $s_m\in(a, b$ преобразованная последовательность $f_m(s_1, \ldots, s_m$ сходится к тому же пределу.

Отмечается также возможность распространения на случай последовательностей функций от бесконечного числа переменных. А. Ф. Тима

4120. Риманово-Чезаровские методы суммирования Хирокава (Riemann—Cesaro methods of summability. Hirokawa Hiroshi), Тохоку сугакудзасси, Tohoku Math. J., 1955, 7, № 3, 279—29 (англ.)

Рассматриваются методы суммирования, которые представляют собой объединение методов Чезаро и Ри мана.

Определение. Ряд

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \qquad (a_k \text{ — числа}) \qquad (1$$

называют (R, p, α)-суммируемым к S, если ряд

$$\sum_{k=1}^\infty S_k^\alpha\left(\frac{\sin kt}{kt}\right)^p$$

сходится в некотором интервале $0<t<t_0$, а

$$\lim_{t\to 0}\sigma(p, \alpha, t)=\lim_{t\to 0}C_{p,\alpha}^{-1}t^{\alpha+1}\sum_{k=1}^\infty S_k^\alpha\left(\frac{\sin kt}{kt}\right)^p = S,$$

где p — целое положительное число, α — любое число $\geqslant -1$, S_k^α — сумма порядка α ряда (1) и

$$C_{p,\alpha}=\begin{cases} 1 \text{ при } \alpha=-1 \\ \pi/2 \text{ при } \alpha=0,\ p=1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-p}(\sin u)^p du \text{ при } -1<\alpha<p-1. \end{cases}$$

Очевидно, что методы $(R, 1)$, $(R, 2)$, (R_1), (R_2) являются частными случаями методов (R, p, α).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть ряд (1) суммируем методом Чезаро $(C, p-\delta)$ к числу S для некоторого $0<\delta<1$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \sigma_k^{p-\delta-1} \right| = O(n),$$

где σ_k^β — чезаровские средние порядка β от ряда (1). Тогда ряд (1) суммируем (R, p, α) к S при $-1 \leqslant \alpha < p-\delta-1$.

Теорема 2. Методы $(R, 1, \alpha)$ не регулярны при $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$.

Теорема 4. (Обобщение теорем Саса). Если ряд (1) суммируем методом Абеля к S и

$$\sum_{k=n}^{2n} (|a_k| - a_k) = O(1),$$

то ряд (1) суммируем $(R, 1, \alpha)$ к S при $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$.

В статье имеется ряд опечаток. П. Л. Ульянов

4121. Ряды Фурье. I. Равенство Парсеваля. Идзуми, Сато (Fourier series. I. Parseval relation. Izumi Shin-ichi, Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 7, 446—450 (англ.)

Дается ряд новых критериев, когда справедливо равенство Парсеваля. Характерный результат:

Если $g(t) \in L(0, 2\pi)$, а функция $f(t) \in B(0, 2\pi)$ такова, что выражение

$$N \int_x^{x+\frac{\pi}{N}} \left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{f\left(t \pm \frac{(2k-1)\pi}{N}\right) - f\left(t \pm \frac{2k\pi}{N}\right)}{k} \right| dt = F_N(x)$$

ограничено по N равномерно относительно x и $\lim_{N\to\infty} F_N(x) = 0$ для почти всех x, то справедливо равенство Парсеваля, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, g(u)\, du = \frac{a_0 a_0^1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n a_n^1 + b_n b_n^1\right), \quad (1)$$

где a_n, b_n и a_n^1, b_n^1 — коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$. При этом ряд в (1) сходится.

Еще формулируется, без подробного доказательства, ряд результатов, показывающих справедливость равенства (1) (и ему подобных) при различных предположениях о функциях f и g. П. Л. Ульянов

4122. О полной ортогональной системе. Сибуя, Ивахори (完全正規直交系について. 澁谷泰隆, 岩堀長慶), 數學, Сугаку, 1956, 8, № 1, 30—31 (япон.)

4123 К. Инвариантные свойства для простой сходимости. Мочан (Propriétés invariantes par convergence simple. Thèse. Motchane Léon, Paris, Gauthier—Villars, 1955, 62 p.). Bibliogr. France, 1956, **145**, № 17, 392 (франц.)

4124 К. Ряды Тейлора. Фрей (Taylor-sorok. Egyetemi segédkönyv., Frey Tamás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1955, 184 l., 26 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 12, 383 (венг.)

4125 К. Бесконечные ряды. Кнопп (Szeregi nieskończone. Knopp Konrad. Tłum. z niem. Paweł Olszewski, Warszawa, PWN, 1956, 608 s., 48, 60 z.) (польск.)

Перевод известной книги, которая переиздавалась четыре раза (первое издание в 1921 г.) и была переведена на английский язык. Она предназначена для слушателей математических факультетов университетов. Однако ввиду широкого круга рассматриваемых вопросов, а также ввиду многочисленных сносок, указывающих литературные первоисточники, книга окажет большие услуги читателю, более подробно интересующемуся теорией рядов и ее применением. Особенное внимание автор обращает на точность доказательств, однородность изложения и усвоение читателем основных понятий. Для этой цели предназначена обширная первая часть книги, в которой содержится теория действительных (вещественных) чисел и последовательностей чисел (являющаяся одновременно основой дальнейшего изложения), а также многочисленные примеры, примечания и задачи, всесторонне освещающие рассматриваемую тематику.

Во второй части книги содержится теория бесконечных рядов. Рассмотрены следующие темы: ряды с положительными членами; ряды с произвольными членами, с учетом вопроса перестановки и умножения рядов; степенные ряды и функции, представленные при помощи функциональных рядов; действия над рядами; разложения элементарных функций; теория бесконечных произведений, а также точное и приближенное определение сумм рядов с учетом оценки погрешностей.

В третьей части, в которой более обширно представлена теория рядов, автор приводит более подробные результаты теории рядов, а также многосторонние и многочисленные применения. В этой части представлены следующие вопросы: в разделе о рядах с положительными членами — сравнительные логарифмические и специальные критерии, теорема Абеля, Дини и Прингсгейма, интегральные критерии и критерии Ермакова; во втором разделе, посвященном рядам с произвольными членами — критерий Дирихле, Абеля, Дю буа—Реймона и Дедекинда, вопрос изменения порядка членов в условно сходящихся рядах, функциональные ряды и последовательности, критерии равномерной сходимости, ряды Фурье и их применение, произведения с переменными членами; теория рядов с комплексными членами и применения к теории аналитических функций; расходящиеся ряды, суммируемость рядов, метод Гёльдера, Чезаро, Абеля, Эйлера, Риша, Бореля, Леруа, а также применение суммируемости в смысле Чезаро к теории рядов Фурье; суммируемая формула Эйлера, а также асимптотические разложения и примеры асимптотических разложений.

Перевод книги, который был довольно трудным, выполнил редакционный коллектив под руководством Павла Ольшевского. T. Iwiński

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4126. Неравенства для производных от полиномов Лежандра. Митринович (Inégalités pour les dérivées des polynômes de Legendre. Mitrinovitch Dragoslav S.), Bull. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 172—177 (франц.)

Устанавливается, что $\left|P_n^{(s)}(x)\right| \leqslant \left\{P_n^{(s)}(x)\right\}_{x=1}$, $x \in [-1, 1]$. Точное значение правой части этого неравенства порождает следующее неравенство:

$$\left|P_n^{(s)}(x)\right| \leqslant \frac{s!}{2^s}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}, \quad (1)$$

$$x \in [-1, 1];\ n = 1, 2, \ldots;\ s \leqslant n,$$

из которого следует результат Сансоне $|P_n^{(s)}(x)| < \frac{1}{s!} n^{2s}$. Из (1) вытекает и следующее неравенство: $|P_n^{(s)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^s s!}(n+s+1)^{2s}$, справедливое при тех же условиях относительно x, s и n, что и (1).

М. Н. Олевский

4127. Рекуррентная формула, относящаяся к полиномам Лежандра. Кастро (Formula de recurrencia relativa a los polinomios de Legendre. Castro Antonio de), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, **15**, № 5—6, 153—160 (исп.)

Для произведения $P_m(x)P_n(x)$, $m \leqslant n$, дается выражение в виде линейной комбинации полиномов $P_{n+m-2h}(x)$, $h = 0, 1, \ldots, m$ с постоянными коэффициентами ($P_k(x)$ — полином Лежандра k-го порядка).

М. Н. Олевский

4128. Об одном неравенстве, относящемся к производным полиномов Лежандра. Эвейда (On an inequality concerning the derivatives of the Legendre polynomials. Eweida M. T.), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, **15**, № 5—6, 161—164 (англ.)

Доказывается неравенство $[P_n^{(r)}(x)]^2 > P_{n-1}^{(r)}(x)P_{n+1}^{(r)}(x)$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$; $n \geqslant 1$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$; при $r = 0$ и $-1 < x < 1$ это неравенство было отмечено Тураном (Szegö G., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 401—405).

М. Н. Олевский

4129. О неприводимости полиномов Лежандра. Мельников И. Г., Укр. матем. ж., 1956, **8**, № 1, 26—33

Дано простое доказательство неприводимости (над полем рациональных чисел) многочленов $P_l(x)$ с четным индексом l и $x^{-1}P_l(x)$ с нечетным l ($l = 0, 1, 2, 3, \ldots$) как для установленных случаев при $l = p$; $p-2$; $(p-1)p^k+1$, так и для случаев $l = (p+1)p^k$; $(p+1)p^k+1$, где p — нечетное простое число; $k \geqslant 1$ — любое целое число. $P_l(x)$ — полиномы Лежандра:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!\,(l-k)!\,(l-2k)!} x^{l-2k},$$

$t = \frac{1}{2}l$ при l четном и $t = \frac{1}{2}(l-1)$ при l нечетном.

Г. Н. Савин

4130. Полиномы Лагерра и Эрмита как частный случай одного класса ортогональных полиномов. Эндль (Les polynômes de Laguerre et de Hermite comme cas particuliers d'une classe de polynomes orthogonaux. Endl Kurt), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1956, **73**, № 1, 1—13 (франц.)

Рассмотрим звезду $\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda=0}^{k-1} \mathfrak{S}_\lambda$, симметричную к k лучам $\mathfrak{S}_\lambda$

$$\mathfrak{S} = \left[re^{\frac{2\pi i}{k}\lambda} \right]_{0 \leqslant r < R} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$$

и выберем в качестве весовой функции $p_k(z)$, инвариантную при вращении на $2\pi/k$. Автор определяет скалярное произведение

$$(P, Q)_{p_k(z)}^{(k)} = \int_{\mathfrak{S}} P\overline{Q}p_k(z)\,dr = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{0}^{R} P(z)\overline{Q}(z)\,dr$$

и этим ортогонализирует систему степенной $\{z^n\}$.

Случай $p_k(z) = e^{-z^k}$ и $R = \infty$ дает класс ортогональных систем $\{P_{k,n}(z)\}$, который включает системы Лагерра ($k=1$) и Эрмита ($k=2$). Пусть $n = n_k^* + n_k k$, где $0 \leqslant n_k^* < k$. Устанавливается точная формула полинома $P_{k,n}(z)$, а именно:

$$P_{k,n}(z) = n_k! \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{(-1)^{n_k-\nu}}{\nu!} \binom{n_k + \frac{2n_k^*+1}{k} - 1}{n_k - \nu} z^{n_k^* + \nu k}$$

при этом используется нормировка

$$(P_{k,n}(z),\ P_{k,n}(z))_k = k(n_k!)^2 \binom{n_k + \frac{2n_k^*+1}{k} - 1}{n_k} \times \int_0^\infty r^{2n_k^*} e^{-r^k}\,dr.$$

Упрощенное представление для $P_{k,n}(z)$ может быть найдено в терминах обобщенных полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ через соотношение $P_{k,n}(z) = z^{n_k^*} L_{n_k}^{\left(\frac{2n_k^*+1}{k}-1\right)}(z^k)$. Откуда выводится дифференциальное уравнение, представление $P_{k,n}(z)$ через обобщенные гипергеометрические ряды. Наконец доказывается, что предел системы $\{P_{k,n}(z)\}$ есть система степеней $\{z^n\}$, а

$$\lim_{k\to\infty}(P, Q)_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{i\varphi})\overline{Q(e^{i\varphi})}\,d\varphi.$$

С. Ю. Сю

4131. Один класс полиномов и обобщение чисел Стирлинга. Чак (A class of polynomials and generalization of Stirling numbers. Chak A. M.), Duke Math., J., 1956, **23**, № 1, 45—55 (англ.)

Рассмотрены полиномы

$$G_{n,k}^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha-kn+n}e^x(x^kD)^n e^{-x}x^\alpha.$$

Они являются обобщением изученных ранее несколькими авторами полиномов $G_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}e^x(xD)^n e^{-x}x^\alpha$ (см., например, Toscano, Rev. mat. Univ. Parma, 1950, 1, 459—470) и связаны с полиномами

$$L_{n,\lambda}^{(\nu)} = \lambda^n x^{-(\nu+n+1)/\lambda} e^x \left(x^{1+1/\lambda}D\right)^n \left(e^{-x}x^{(\nu+1)/\lambda}\right),$$

введенными Сриваставой в его докторской диссертации соотношением

$$G_{n,k}^{(\alpha)}(x) = (k-1)^n L_{n,1/(k-1)}^{(\alpha)}(x).$$

Для этих полиномов получены явные выражения, рекуррентные формулы, порождающая функция и некоторые другие соотношения.

Использованные при этом методы применяются к исследованию таких линейных операторов A, X, которые удовлетворяют условию $AX - XA = 1$.

Полиномы $G_{n,k}^{(\alpha)}(x)$ связаны определенным образом с полиномами $P_{n,r}^{(\alpha)}(x) = \left(e^{x^r}x^{-\alpha}/n!\right)D^n\left(x^{n+\alpha}\cdot e^{-x^r}\right)$, которые были известны ранее при $r=2$, $\alpha=0$. Ра

сматриваются свойства полиномов $P_{n,r}^{(\alpha)}(x)$, в частности, получено свойство ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^r} x^\alpha P_{m,r}^{(\alpha)}(x)\, P_{n,r}^{(\alpha)}(x)\, dx = 0,$$

если $rm < n$ или $rn < m$.

В заключение построен новый класс полиномов, охватывающий все 14 классов полиномов, введенных Тоскано (Toscano, Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes, 1939, 3, 721—757). Г. П. Сафронова

4132. Γ(z) на минус бесконечности. Фулкс (Γ(z) at minus infinity. Fulks W.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 7, 484 (англ.)

Устанавливается формула

$$\Gamma(z-n) \sim (-1)^n \sqrt{\pi/2}\; n^{z-n-1/2} e^n \csc \pi z.$$

В. В. Немыцкий

4133. Некоторые неравенства для неполных β-функций. Хеселден (Some inequalities satisfied by incomplete beta functions. Heselden G. P. M.), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3—4, 192—200 (англ.)

Пусть $S(x, n) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(2p+2)}{\Gamma^2(p+1)} \dfrac{2^{1-n}}{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{x^2}{\alpha^2}\right)^p & -\alpha \leqslant x < \alpha; \\ 0 & x \geqslant \alpha; \end{cases}$

$$R(x, n) = \frac{1}{B(p, p)} \int_{t(x,n)}^{1} u^{p-1}(1-u)^{p-1} du, \quad x \geqslant -\alpha$$

и $T(x, n) = xR(x, n) + S(x, n)$; здесь $\alpha \equiv (n-1)/\sqrt{n}$, $p \equiv (n-2)/2$ и $t(x, n) = \max\{0, (\alpha - x)/2\alpha\}$. Доказывается, что для целых $n \geqslant 3$ и для $x \geqslant -\alpha$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} T(x, n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2} + x \int_{-x}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right)$,

2) $S(x, n) \leqslant S(x, n+1)$ и 3) $T(x, n) \leqslant T(x, n+1)$; равенства в 2) и 3) имеют место лишь при $x \geqslant n/\sqrt{n+1}$. М. Н. Олевский

4134. К теории гамма- и дзета-функций Эйлера. Зморович В. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 72—91

Работа частично имеет методическую цель — упрощение и систематизацию вывода ряда известных формул, но содержит и некоторые новые формулы.

§ 1 посвящен выводу различных форм остатка $P(z)$ формулы $\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + P(z)$. Трудно оценить упрощения, достигнутые автором, так как используемые им перестановки предельных операций вообще не обосновываются (кроме одного случая, на стр. 76, где обоснование проведено неточно).

В § 2, отправляясь от простейшего интегрального представления дзета-функции

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\mathrm{Re}\, s > 1),$$

автор непосредственно приходит к формулам

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} + \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-2} \left(\frac{2x}{e^{2x}-1} - e^{-x} \right) dx \quad (\mathrm{Re}\, s > -1)$$

и

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} \left[\frac{\pi}{\sin \pi(s-1)} + \int_0^\infty x^{s-2} \left(\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] \quad (-1 < \mathrm{Re}\, s < 2).$$

Первая из них позволяет просто вывести формулу Лерха

$$\lim_{s\to 1} [\zeta(s) - 1/(s-1)] = -\Gamma'(1), \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

Из второй, в § 3, автор получает представление дзета-функции на прямой $s = 1/2 + i\tau$ $(-\infty < \tau < \infty)$ (в которое, однако, по мнению референта, вкрались некоторые вычислительные погрешности).

В § 4 трактуется обобщенная дзета-функция Гурвица. В § 5 рассматриваются интегралы

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin\varphi)^p (\ln\cos\varphi)^q \, d\varphi$$

и в особенности интегралы $I_{p,0}$, обобщающие известный интеграл Эйлера $I_{1,0} = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Устанавливается, что $I_{p,0} = \frac{1}{2^{p+1}}\, p!\, A_{p,0}$, где $A_{p,0}$ — коэффициенты разложения

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\Gamma^{-1}(1+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,0}\, \alpha^p.$$

Отсюда, с использованием известных формул из теории гамма-функции, находится в конечном виде интеграл $I_{2,0} = (\pi/4)(\pi^2/6 + 2\ln^2 2)$, а интегралы $I_{3,0}$, $I_{4,0}$ выражаются через значение $\zeta(3)$ и т. д.

В заключительном § 6 дается новый элементарный вывод формулы Стирлинга. Г. М. Фихтенгольц

4135. Некоторые граничные свойства функции Эйлера. Чакалов (Някои гранични свойства на ойлеровата гама-функция. Чакалов Л.), Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1956, 2, № 1, 27—34 (болг., рез. русск., франц.)

Доказано несколько теорем о функциях $\dfrac{\Gamma(\pm x + ai)}{\Gamma(\pm x)}$ при $x \to \infty$ ($\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера; $a \neq 0$ — некоторое фиксированное число). Б. А. Рымаренко

4136. Неполные функции Бесселя и Струве. Стил, Уорд (Incomplete Bessel and Struve functions. Steel W. H., Ward Joan Y.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 431—441 (англ.)

Исследуются функции $J_\nu(x, \omega)$, $H_\nu(x, \omega)$ и $P_\nu(x, \omega)$, определенные при помощи формул

$$J_\nu(x, \omega) + iH_\nu(x, \omega) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_\omega^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} P_\nu(x, \omega), \quad \mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

Функции данного типа встречаются в математической физике в связи с некоторыми задачами теории диф-

фракции. При $\omega=0$ функции $J_\nu(x,\omega)$ и $H_\nu(x,\omega)$ переходят соответственно в функции Бесселя и Струве.

Авторы устанавливают ряд свойств рассматриваемых функций (дифференциальные уравнения, рекуррентные соотношения, разложения в степенные ряды и ряды Неймана, асимптотические ряды для больших x и т. д.).

Приведена таблица функции

$$P_n\left(\frac{x}{1-\omega},\ \omega\right)e^{-\frac{i\omega x}{1-\omega}}-P_n(x,0)\,P_n(0,\omega),$$

$$x=0\,(0{,}5)\,12{,}5,\quad \omega=-0{,}1\,(0{,}1)\,1,\quad n=0{,}1$$

и вспомогательная таблица, позволяющая по этим данным вычислить значения $P_n(x,\omega)$.

Н. Н. Лебедев

4137. Некоторые формулы по бесконечным рядам бесселевых функций. Беркеш (Einige Formeln über unendlichen Reihen Besselscher Funktionen. Berkes Branko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 3, 161—170 (нем.; рез. хорв.)

Автор рассматривает преобразование Лапласа периодической функции $f(t)$, которая имеет период $4T$

$$f(t)=\left[1-\left(\frac{t-2T}{2T}\right)^2\right]^{\nu-1/2}\qquad(0\leqslant t\leqslant 4T),$$

где ν — действительное число и $>-1/2$. Взяв обратное преобразование к преобразованию Лапласа функции $f(t)$ и представляя его в виде ряда, автор устанавливает следующие формулы для бесселевых функций $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x)=\frac{x^{\nu-1}\sin x}{2^\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+2^{\nu+1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\times\right.$$

$$\left.\times\frac{J_\nu(k\pi)}{(k\pi)^\nu}\frac{x^2}{x^2-(k\pi)^2}\right],\quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{J_\nu(k\pi)}{k^\nu}=\frac{\pi^\nu}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}.$$

Аналогичные рассуждения применяет к функциям Струве $H_\nu(x)$ и показывает, что

$$H_\nu(x)=2x^\nu\sin x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{H_\nu(k\pi)}{(k\pi)^{\nu-1}}\frac{1}{x^2-(k\pi)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{H_\nu[(2k-1)\pi]}{(2k-1)^\nu}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu-\frac12}\frac{\pi^{\nu-\frac12}}{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}$$

и что

$$H_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\left[\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)}+2^\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_\nu(k\pi)}{(k\pi)^\nu}\frac{x^2}{x^2-(k\pi)^2}\right]-$$

$$-\operatorname{ctg}x\,J_\nu(x).$$

Устанавливается, что сходимость рядов в этих формулах проверяется сравнением с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\,(s>1)$ и что написанные выше формулы имеют место соответственно для $\nu>-2/2$, $\nu>1/2$, $\nu>-1/2$, $\nu>-5/2$, (x — действительное и произвольное).

Показывается также, что из первой формулы при $\nu\to\infty$ получается классическое разложение

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x}{k^2-x^2}.$$

Leng Sen-ming

4138. Заметка о частных суммах некоторых базисных двусторонних гипергеометрических рядов. Сингх (A note on the partial sums of certain basic bilateral hypergeometric series. Singh V. N.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 756—758 (англ.)

Пользуясь результатом Агарвала (РЖМат, 1954, 3373), автор устанавливает, что $R(P,N)=R(N,P)$, где $R(P,N)$ — следующее произведение:

$$(1-X)\prod_{n=1}^{P}\frac{(1-Eq^n)(1-Dq^n)(1-Cq^{P+n-1})(1-Xq^{n-P}/DE}{(1-q^{2N+n})(1-DEq^n)(1-Xq^{n-P}/D)(1-Xq^{n-P}/E}\times$$

$$\times{}_8\Psi_8\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_8;\ q\\ b_1,\ldots,b_8\end{matrix}\right]_N;$$

здесь $X=Cq^{2P+N}$; $a_1=Xq^{-N}$, $a_2=-a_3=q\sqrt{X}$,

$$a_4=qX/C,\quad a_5=Xq^{-P}/DE,\quad a_6=Xq^{-P},$$

$$a_7=D,\quad a_8=E;\quad b_ia_i=qX\ (i=1,\ldots,8);$$

$${}_8\Psi_8\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_8;\ x\\ b_1,\ldots,b_8\end{matrix}\right]_N=\sum_{-N}^{N}\frac{(a_1)_{q,n}\cdots(a_8)_{q,n}}{(b_1)_{q,n}\cdots(b_8)_{q,n}}x^n,$$

$(a)_{q,n}$ — обозначает то же, что и в РЖМат, 1955, 5915.

М. Н. Олевский

4139. Неравенства, включающие в себя цилиндрические функции. Курц, Сигел (Inequalities involving cylindrical functions. Curtz T. B., Siegel K. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 823—827 (англ.)

В этой заметке авторы устанавливают некоторые неравенства для функций Бесселя $J_\nu(\nu x)$ и $J'_\nu(\nu x)$, где ν есть действительное число >0 и $0<x\leqslant 1$. Используя известные классические формулы (Watson V., A treatise on the theory of Bessel functions, 2ème ed, Cambridge University Press, 1944), показывают, что $J_\nu(\nu x)\leqslant\exp\{-\nu F(0,x)\}$, $J'_\nu(\nu x)\leqslant$ $\leqslant\frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}J_\nu(\nu x)+xJ'_\nu(\nu)\exp\{-\nu F(0,x)\}$ и $J'_\nu(\nu)<$ $<\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2^{1/3}\pi\nu^{2/3}}$.

Затем авторы показывают, что функция Неймана $N_\nu(\nu x)$ удовлетворяет неравенству (там же, стр. 487) $|N_\nu(\nu x)|\leq|N_\nu(\nu)|\leq 1{,}73\,|J_\nu(\nu)|$ для $j'_{\nu/\nu}\geq x\geq 1$, где j'_ν — простой нуль производной $J_\nu(x)$.

S. Vasilache

4140. О функции $H(m,a,x,)=\exp(-ix)\,I(m+1-ia,2m+2;2ix)$. Лоуан, Хоренстейн (On the function $H(m,a,x)=\exp(-ix)\,F(m+1-ia,\ 2m+2;\ 2ix)$. Lowan Arnold N., Horenstein William), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 1—31 (англ.)

Перепечатано из J. Math. and Phys., 1942, **21**, № 4 (англ.)

4141. К теории присоединенных сферических функций. Виленкин Н. Я., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 177

4142. О P-функции (Римана), выражаемой через элементарную функцию. Фукухара, Охаси (初等函數で表わせる P 函數について. 福原滿洲雄, 大橋三郎), 數學, Сугаку, 1956, **8**, № 1, 27—29 (япон).

4143. Два свойства сферических функций. Джефрис (Two properties of spherical harmonics.

Jeffreys Harold), Quart. J. Mech. and. Appl. Math., 1955, 8, № 4, 448—451 (англ.)

Устанавливается, что $\iint \sum_i \left(\frac{\partial K_n}{\partial x_i}\right)^2 ds = \frac{n(n+1)}{a^2} A$ и $\iint \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 K_n}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 ds = \frac{n(n-1)(4n^2-1)}{a^4} A$, где $A = \iint K_n^2 ds$, K_n — шаровая функция целой степени $n > 0$ и интегралы берутся по поверхности сферы S радиуса a. В работе знак суммы в обоих интегралах опущен.

Отмечается также, что если в качестве меры иррегулярности на сфере S функции f, заданной на ней, принять отношение $I[f] = \iint (\text{grad } f)^2 ds / \iint f^2 ds$, то: 1) оно стационарно для малых вариаций f в том случае, если f — сферическая функция и 2) для любой функции f, $I[f] \geqslant I[S_n] = n(n+1)$, где S_n — наинизший член разложения f в ряд по сферическим функциям. М. Н. Олевский

4144. К теории функций Ламе. Брёдель (Zur Theorie der Lamé'schen Funktionen. Brödel Walter), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—1956, 5, № 1—2, 151—155 (нем.)

Статья не содержит существенно новых результатов по теории функций Ламе и преследует в основном методические цели. Исходным пунктом рассуждений является требование, чтобы нормальные решения уравнения Лапласа $u = \Sigma HZ$, получаемые путем разделения переменных в эллиптической системе координат, представляли регулярные гармонические функции во всякой конечной части пространства. Это требование приводит к выделению множителей допустимого вида, которые определяются как решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с естественными граничными условиями.

Намечен путь дальнейшего построения теории рассматриваемых функций. Н. Н. Лебедев

4145. Система однородных сферических функций. Айкенберри (A system of homogeneous spherical harmonics. Ikenberry Ernest), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 10, 719—721 (англ.)

Указывается процесс построения однородных гармонических полиномов $Y(x_1, x_2, x_3)$ степени s ($s = 1, 2, 3, \ldots$), заключающийся в следующем: за функции первой степени выбирается функция $Y_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), второй степени — функция $Y_{ij} = x_i x_j + x^2 Z_0$ ($i, j = 1, 2, 3$), третьей степени — функция $Y_{ijk} = x_i x_j x_k + x^2 Z_1$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) и т. д., где $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Функции $Z_0, Z_1, \ldots$ находятся из условий $\nabla^2 Y_{ij} = 0$, $\nabla^2 Y_{ijk} = 0$ и т. д. Причем, в общем случае для функции Y_s оператор ∇^2 должен быть применен к функции Y_s для s четного $\frac{s}{2}$ раз и для s нечетного $\frac{s-1}{2}$ раз. Г. Н. Савин

4146 К. Таблицы веберовских функций параболического цилиндра, служащих решениями дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{4} - a\right) y = 0$. (Tables of Weber parabolic cylinder functions, giving solutions of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{4} - a\right) y = 0$. London, H. M. S. O., 1955 (1956), 233 pp., 63 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 324, 7 (англ.)

Функции параболического цилиндра, введенные первоначально Вебером, имеют большое применение в различных разделах математической физики. Это имеет место при решении волнового уравнения в двумерных областях с параболическими границами, при исследовании распространения волн в слоистой среде с квадратичной зависимостью показателя преломления среды от высоты, а также при исследовании задач, приводящих к уравнению вида $y'' + I(x) y = 0$, в котором нельзя ограничиться линейной аппроксимацией функции $I(x)$.

Книга содержит следующие главы: математическое введение; описание таблиц, методов их расчета и обзор ранее вышедших таблиц; сводка формул; таблицы решений уравнения

$$d^2y/dx^2 + (x^2/4 - a) y = 0 \qquad (1)$$

и вспомогательных функций и констант, облегчающих вычисление асимптотики решений. Основным содержанием тома являются восьмизначные таблицы решений уравнения (1). Основным содержанием математического введения является теория решений обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и

$$d^2y/dx^2 - (x^2/4 + a) y = 0, \qquad (2)$$

известных под названием уравнения Вебера (Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., ГТТИ, 1934, ч. II). Решения этих уравнений называются функциями параболического цилиндра или функциями Вебера.

При отрицательных полуцелых значениях параметра a, решения уравнения (2), ограниченные при $|x| \to \infty$, выражаются через полиномы Эрмита и функцию ошибок и, следовательно, в какой-то мере табулированы.

Решения уравнения (1) не табулировались. Поэтому предлагаемый том содержит таблицы решений уравнения (1); теория дается для решений обоих уравнений.

Сначала рассматриваются некоторые задачи, приводящие к уравнениям вида (1) и (2). Именно, рассматривается разделение переменных в уравнении Гельмгольца

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 + \varkappa^2\varphi = 0$$

в координатах параболического цилиндра.

Другой задачей, приводящей к уравнениям (1) или (2), является приближенное решение уравнения $y'' + I(x) y = 0$ с квадратичной аппроксимацией функции $I(x)$.

Далее рассматривается возможный выбор фундаментальных решений уравнений (1) и (2), который сводится к следующему. Для уравнения вида $d^2y/dx^2 + I(x) y = 0$ вещественная прямая, которую пробегает переменная x, разбивается на две области по признаку $I(x) \lessgtr 0$. В области, где $I(x_0) < 0$, решения уравнения $d^2y/dx^2 + I(x_0) y = 0$ суть экспоненты и область называется экспоненциальной. Во второй, $I(x_0) > 0$, решения уравнения $d^2y/dx^2 + I(x_0) y = 0$ осциллируют, такая область называется осцилляционной. Для экспоненциальной области фундаментальные решения выбираются из условия, чтобы их отношение на одном конце области отличалось от такого же отношения на другом конце области наибольшим возможным множителем. В осцилляционной области два независимых решения можно представить в виде $c_1 F \cos(\chi + \epsilon_1)$ и $c_2 F \cos(\chi + \epsilon_2)$, где c_1, c_2, ϵ_1 и ϵ_2 — константы, а F и χ — моно-

тонные и относительно медленно меняющиеся функции. Для осцилляционной области фундаментальные решения выбираются из условий $|\epsilon_1 - \epsilon_2| = \pi/2$ и $c_1 = c_2$.

Далее дается сводка результатов теории решений уравнений (1) и (2) на комплексной плоскости. Именно, дается сводка интегральных представлений для решений (1) и (2), получающихся из найденных Уиттекером интегральных представлений для функции $D_n(z)$. Так как уравнение (2) при замене a и z на $-ia$ и $ze^{i\pi/4}$, соответственно, переходит в уравнение (1), то теория решений на комплексной плоскости для обоих уравнений одна и та же.

В следующем разделе рассматриваются асимптотические выражения для решений уравнений (1) и (2). Асимптотические выражения разбиваются, как обычно, на три основные группы: 1) $x^2/4 \gg |a|$, 2) $|a| \gg x^2/4$, 3) $x^2/4$ и $|a|$ велики и одного порядка.

В главе «Сводка формул» приводятся формулы для асимптотики с помощью интеграла Эйри, получающейся при замене переменных $t = g(x)$, $Y = y\sqrt{g'(x)}$ в уравнении $d^2y/dx^2 + I(x)\,y = 0$. Функция $g(x)$ выбирается из условия $-I(x)/g'^2(x) = t$, что дает

$$g(x) = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2}\int_x^{x_0} I(x)^{1/2}\,dx\right)^{2/3} & \text{при } x \leqslant x_0, \\ \left(\frac{3}{2}\int_{x_0}^{x} |I(x)|^{1/2}\,dx\right)^{2/3} & \text{при } x \geqslant x_0, \end{cases}$$

где $x = x_0$ — корень уравнения $I(x_0) = 0$ и $I(x) \lessgtr 0$ при $x \lessgtr x_0$.

Исходное уравнение при этом приближенно сводится к уравнению Эйри

$$d^2Y/dt^2 - tY = 0.$$

Для рассчетных целей бывает удобнее оперировать не с самими функциями Вебера, а с их логарифмом и логарифмической производной в показательной области и с модулем и фазой в осцилляционных областях. Поэтому далее даются асимптотические разложения для таких величин. Также даются разложения для модуля и фазы произведений веберовских функций.

Приводится ряд формул, связывающих функции Вебера с функциями Бесселя, вырожденной гипергеометрической финкцией, интегралами Френеля и другими специальными функциями.

В заключение математического введения дается ряд формул для гамма-функции. Сводка основных формул математического введения дана в специальной главе «Сводка формул».

В книге даны только таблицы, относящиеся к решениям $W(a, x)$ и $W(a, -x)$ уравнения (1).

Таблица I (стр. 94—177) дает значения $W(a, x)$ и $W(a, -x)$ вместе с их приведенными производными, определяемыми формулами

$$\tau^n \equiv h^n/n!\; d^n/dx^n\, W(a, \pm x).$$

Аргумент изменяется от 0 до 10 через интервал $h = 0{,}1$. Параметр a пробегает целые значения от -10 до 10. Таблица восьмизначная.

Таблица II (стр. 178—187) дает значение $\ln W(a, x)$ и $\dfrac{W'(a, x)}{W(a, x)}$ для экспоненциальной области для целочисленных a от 1 до 10 и $|x| \leqslant 2\sqrt{a}$, через 0,1.

Таблица III (стр. 188—222) дает вспомогательные функции $F(a, x)$, $\chi(a, x)$, $G(a, x)$ и $\psi(a, x)$, являющиеся модулями и фазами основных функций $W(a, \pm x)$ и их производных $d/dxW(a, \pm x)$.

$$W(a, x) = k^{1/2}F\cos\chi,\ W(a, -x) = k^{-1/2}F\sin\chi;$$

$$d/dxW(a, x) = -k^{1/2}G\cos\psi,$$

$$d/dxW(a, -x) = -k^{-1/2}G\sin\psi,$$

где $k = \sqrt{1 + e^{2\pi a}} - e^{\pi a}$.

Значения F, χ, G, ψ табулированы для $-a$ целочисленного от -2 до 10 и x от 0 (через 0,1) до 10, а также для $+a$ целочисленного от 3 до 10 и x от 2 (через 0,1) до 10.

В таблицах II и III даны для интерполяции модифицированные вторые и четвертые разности.

Таблицы IV—VI (стр. 223—233) дают значения различных констант, зависящих от k, значения гамма-функции и величин, зависящих от них, встречающихся в теории функций $W(a, \pm x)$.

Вычисление таблиц производилось следующим образом. Сначала вычислялись основные таблицы I, для чего численно интегрировалось уравнение (1) при помощи ряда Тейлора. Приведенные производные для ряда Тейлора вычислялись по рекуррентной формуле. Для проверки интеграция производилась как в прямом, так и в обратном направлении. Остальные таблицы вспомогательных функций вычислялись исходя из основных таблиц I.

В разделе «Ранее вышедшие таблицы» дается перечень таблиц для решений уравнения (2) и указывается на отсутствие таблиц для решений уравнения (1). Библ. 53 назв. Н. С. Кошляков

4147 К. Сфероидальные волновые функции, в том числе таблицы для определения констант и коэффициентов. Стреттон, Морс, Чжу, Литл, Корбато (Spheroidal wave functions, including tables of separation constants and coefficients. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Little J. D. C., Corbato F. J. New York, Wiley, London, Chapman and Hall., 1956, XIII, 613 pp., ill., 5L), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 332, 11 (англ.)

4148 К. Собрание исследований по теории гипергеометрических функций двух переменных. Ян У-чжэнь (Contribution à l'étude des fonctions hypergéométriques de deux variables. Thèse. Yang Ou Tchen. Paris, Gauthier-Villars, 1955, 71 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 13, 295—296 (франц.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4149. Философия техники интегральных преобразований. Кон (Philosophy of transform techniques. Cohn George I.), Proc. Nat. Electronics Conf. 11. Chicago, 1955. Chicago, 1956, 544—562 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы общей теории интегральных преобразований как методов нахождения решений некоторых типов функциональных уравнений. Одним из основных вопросов является отыскание обратного интегрального преобразования, для чего приводятся следующие два метода:

1. Разложение функции в дискретный или непрерывный спектр по ортогональным функциям в виде ряда соответственно интеграла, причем формулы коэффици-

ентов разложений представляют обратные интегральные преобразования.

2. Представление решения рассматриваемого уравнения в виде криволинейного интеграла в комплексной плоскости, путь интегрирования которого подходящим образом выбирается; полученный криволинейный интеграл выражает обратное интегральное преобразование.

В качестве примеров выбора интегрального преобразования, соответствующего конкретной задаче, приводятся обыкновенные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются многочленами от независимой переменной, а также интегральные уравнения с ядрами видов $K(t-\tau)$ и $K(t\tau)$. В этих примерах применяются интегральные преобразования Лапласа, Эйлера и Меллина. Н. А. Бразма

4150. Интегральная теорема Фурье для функций интервалов. Ньюнс (A Fourier integral theorem for functions of intervals. Newns W. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 816—822 (англ.)

Автор определяет преобразование Фурье для функций интервала и получает результат, аналогичный классической теореме Планшереля. Функция u, определенная на любом интервале $I \subset [0, \infty]$, принадлежит, по определению, классу B^2, если u интегрируема на любом ограниченном интервале и если

$$\int_0^{\infty} \frac{\{u(I)\}^2}{|I|} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{-A} \frac{\{u(I)\}^2}{|I|}$$

(где $\overline{\int}$ обозначает верхний интеграл) существует. Интеграл от функции f по отношению к функции интервала u определен как предел римановых сумм $\sum f(t_k)\, u(I_k)$. Преобразование Фурье функции $u \in B^2$ есть функция $g(x)$, равная пределу в среднем $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^a \cos ntu\,(dt)$ для $a \to \infty$. Основной результат автора (аналогичный теореме Планшереля) следующий: Если $u \in B^2$, тогда преобразование Фурье существует, принадлежит L^2 и удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{\infty} \{g(x)\}^2\, dx \leqslant \int_0^{-\infty} \frac{\{u(I)\}^2}{|I|}.$$

Если h — обычное преобразование g (относительно ядра $\cos xt$), имеем: $\int_0^x u\,(dt) = \int_0^x h(t)\, dt$ и $u'(t) = h(t)$ почти всюду. S. Vasilache

4151. О вычислении одного интеграла типа Фурье. Карпусь (Про обчислення одного інтеграла типу Фур'э. Карпусь Г. С.), Наук. зап. Сумськ. держ. пед. ин-т, 1956, 1, 62—64 (укр).

Статья новых результатов не содержит. В. В. Немыцкий

4152. Теорема Фурье для матриц. Магнус (A Fourier theorem for matrices. Magnus Wilhelm), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 880—890 (англ.)

Пусть $F(t)$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой являются суммируемыми функциями переменной t, $-\infty < t < +\infty$. Если H — эрмитова матрица, то существует интеграл

$$G(H) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(itH)\, dt, \text{ причем}$$

$$\int G(H) \exp(-itH)\, d\tau = L_n F(t),$$

где L_n — скаляр, зависящий от n, но не от F;

$$d\tau = \prod_{\nu<\mu} \frac{2\sin(\lambda_\nu - \lambda_\mu)/2}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} \prod_{\nu<\mu} ds_{\nu,\mu} \prod_{\nu<\mu} da_{\nu,\mu},$$

если $H = \| s_{\nu,\mu} + i a_{\nu,\mu} \|$, λ_ν — собственные значения матрицы H. Имеет место теорема Планшереля: если элементы матрицы $F(t)$ принадлежат L^2, то

$$\operatorname{trace} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(t) F(t)\, dt = L_n^{-1} \operatorname{trace} \int G^*(H)\, G(H)\, d\tau,$$

где F^* — матрица, сопряженная матрице F. Н. Я. Виленкин

4153. Преобразование Лапласа и функции, двойственные себе. Бос (Laplace transform and self-reciprocal functions. Bose S. K.), Ganita, 1954, 5, № 1, 25—32 (англ.)

Пусть $\varphi(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$, т. е.

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Равенство (1) символически принято записывать также в виде $\varphi(p) \div f(t)$.

В работе устанавливается несколько результатов о преобразованиях Лапласа функций, двойственных себе относительно преобразования Ханкеля порядка ν, т. е. являющихся решениями интегрального уравнения

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(y) \sqrt{xy} J_\nu(xy)\, dy.$$

Приведем один из результатов работы.

Если

$$\varphi_2(p) \div t f_2(t), \quad \varphi_3(p) \div f_3(t), \quad F(p) \div \varphi_3(t) f_2(t)$$

и $t^{-n+1/2}\varphi_3(t) f_2(t)$ двойственна себе относительно преобразования Ханкеля порядка $n-1$, то $t^{n-3/2}F(t)$ двойственна себе относительно преобразования Ханкеля порядка n, где

$$1/vF(v) = \int_0^{\infty} f_3(z)\,(v+z)^{-1} \varphi_2(v+z)\, dz,$$

если только $R(n) > -\frac{1}{2}$, интегралы сходятся абсолютно, преобразования Лапласа для $|f_2(t)\varphi_3(t)|$, $|tf_2(t)|$ и $|f_3(t)|$ существуют, равенство

$$\int_0^{\infty} t^{n-1} F(t) J_n(pt)\, dt = p^n \int_p^{\infty} \frac{\varphi(p)}{p}\, dp,$$

где $\varphi(p) \doteqdot \varphi_3(t)\, f_2(t)$, можно дифференцировать по p и сходится интеграл

$$\int_0^\infty \sqrt{pt} J_n(pt)\, t^{n-3/2} F(t)\, dt = p^{n-3/2}\varphi(p).$$

Б. М. Левитан

4154. К теории преобразований Лапласа—Стилтьеса. Плейель (Beiträge zur Theorie der Laplace—Stieltjes—Transformationen. Pleijel Arne), Math. scand., 1956, 4, № 1, 147—152 (нем.)

Пусть $\alpha(x)$—произвольная комплекснозначная функция вещественного переменного x, имеющая ограниченную вариацию на любом конечном интервале $(0, R)$ и при некотором $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $\sigma_0 > 0$, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-s_0 x} d\alpha(x)$$

сходится. Рассматривается вопрос об условиях, при которых функция

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\alpha(x)$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и при некотором $k \geqslant 0$ удовлетворяет там равномерно по $s = \sigma + it$ условию $f(s) = O(t^k)$. Это имеет место во всех тех случаях, когда при некотором $\rho > k$ равномерно относительно всех вещественных τ и всех $y > 0$,

$$\left| \int_0^y e^{-i\tau x} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\rho d\alpha(x) \right| \leqslant M(1 + |\tau|)^k, \qquad (1)$$

где M — константа.

Наоборот, если функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и удовлетворяет там условию $f(\sigma + it) \asymp O(t^k)$ равномерно по σ, то существуют константы ρ и M, для которых имеет место неравенство (1). А. Ф. Тиман

4155. Преобразование Лапласа и исчисление Хевисайда. Фрухт (La transformacion de Laplace y el calculo de Heaviside. Frucht Roberto), Scientia (Valparaiso), 1955, 22, № 4, 212—228 (исп.)

Элементарное сопоставление методов интегральных преобразований Лапласа и Карсона, причем последний из них называется в данной работе исчислением Хевисайда. Новых результатов нет. Н. А. Бразма

4156. Некоторые свойства обобщенных преобразований Лапласа. Ратхи (Some properties of generalised Laplace transform. Rathie C. B.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1955, A21, № 6, 382—393 (англ.)

Рассматривается преобразование

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-1/2px} (px)^{m-1/2} W_{k,m}(px)\, h(x)\, dx, \qquad (1)$$

где $W_{k,m}(z)$ — функция Уиттекера. В случае, когда $k = -m + 1/2$, преобразование (1) обращается в обычное преобразование Лапласа

$$f(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Соответствие, устанавливаемое преобразованием (1), обозначается в виде $\varphi(p) \overset{v}{\underset{k,m}{=\!=}} h(x)$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $\varphi(p) \overset{v}{\underset{k,m}{=\!=}} h(x)$ и $f(p) \overset{v}{\underset{\sigma,\mu}{=\!=}} x^{2m-2\mu} h(x)$, то

$$\varphi(p) = \frac{p^{m+k-\sigma-\mu+1}}{\Gamma(\sigma - k + m - \mu)} \int_0^\infty t^{\sigma-k+m-\mu-1} (p + t)^{-1} f(p + t)\, {}_2F_1(1/2 - k + m,\ \sigma + \mu - k - m;\ \sigma - \mu - k + m;\ -t/p)\, dt$$

в предположении, что $\operatorname{Re}(\sigma - k + m - \mu) > 0$ и интеграл сходится.

2. Если $\varphi(p) \doteqdot h(x)$ (т. е. имеет место преобразование Лапласа),

$$p^{2-\lambda} h(p) \overset{v}{\underset{k,m}{=\!=}} g(x) \text{ и } p^{2-\mu} g(p) \doteqdot f(x),$$

то

$$\varphi(p) = p^{1-\lambda} \int_0^\infty x^{-\mu} F_{\lambda,\mu}(px)\, f(x)\, dx$$

в предположении, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda + 2m) > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\operatorname{Re}(\mu + 2m) > 0$, интеграл сходится и

$$F_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda + 2m)\,\Gamma(\mu - \lambda)}{\Gamma(\lambda + m - k + 1/2)} x^\lambda \times {}_2F_2(\lambda,\ \lambda + 2m;\ \lambda + m - k + 1/2,\ 1 - \mu + \lambda;\ x).$$

3. Если $\varphi_{k,m}(p) \overset{v}{\underset{k,m}{=\!=}} h(x)$, где $h(x)$ не зависит от k и m, тогда

$$\varphi_{k,m}(p) = \varphi_{k-1/2,\, m+1/2}(p) + \left(\frac{1}{2} - k - m\right) \varphi_{k-1,\, m}(p);$$

и если $\varphi_{k,m,\lambda}(p) \overset{v}{\underset{k,m}{=\!=}} x^\lambda h(x)$, где $h(x)$ не зависит от λ, k и m, тогда

$$\varphi_{k,m,\lambda}(p) = p\varphi_{k-1/2,\, m-1/2,\, \lambda+1}(p) + \left(\frac{1}{2} - k + m\right) \varphi_{k-1,\, m,\, \lambda}(p),$$

$$\frac{d^n}{dp^n}\left\{\frac{1}{p}\varphi_{k,m,\lambda}(p)\right\} = \frac{(-1)^n}{p} \varphi_{k+1/2n,\, m-1/2n,\, \lambda+n}(p)$$

в предположении, что встречающиеся интегралы равномерно сходящиеся и n — целое положительное. Приведены ряд примеров и много формул.

Л. Я. Цлаф

4157. Обобщение теоремы Фрагмена. Василяк (Généralisation d'un théorème de Phragmen. Vasilach Serge), C. r. Acad. sci, 1956, 243, № 20, 1468—1471 (франц.)

Дается обобщение на случай n переменных известной теоремы Фрагмена (Микусинский, Операторное исчисление, М., Изд.-во ин. лит., 1956, гл. 2; РЖМат, 1957, 2475).

Теорема II. Пусть $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — числовая функция, непрерывная на параллелепипеде $\prod_{i=1}^{n}[0, X_i]$. Тогда

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty\\ x_2\to\infty\\ \ldots\ldots\\ x_n\to\infty}} \sum_{k_1,\, k_2,\ldots,\, k_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_n-n}}{k_1!\; k_2!\ldots k_n!} \times$$

$$\times \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\ldots\int_0^{x_n} e^{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i (u_i-\xi_i)}\, g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

$$= \int_0^{u_1}\int_0^{u_2}\ldots\int_0^{u_n} g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Доказательство приводится при $n=2$. Оно аналогично доказательству в цитированной книге Микусинского. Отмечаются n-мерные следствия из n-мерной теоремы Фрагмена, аналогичные приведенным в книге Микусинского: теорема об ограниченных моментах и теорема Лерха. Ф. В. Широков

4158. О свертке функции и распределений с носителем в R_+^n, $n>1$. Василяк (Sur le produit de composition des fonctions et distributions à support dans R_+^n, $n>1$. Vasilach Serge), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 21, 1591—1593 (франц.)

Заметка является продолжением предыдущей (реф. 4157). Заглавие не соответствует содержанию: речь идет только о функциях. Для n-мерной свертки функции самой с собой доказывается аналог теоремы Титчмарша (см. цитированную в предыдущем реферате книгу Микусинского, гл. 2) методом, аналогичным приведенному в книге Микусинского. Доказательство проводится для $n=2$ и опирается на результаты, полученные в предыдущей заметке автора. Ф. В. Широков

4159. Некоторое интегральное преобразование, связанное с распространением тепла. Виддер (Una transformazione integrale connessa con la propagazione del calore. Widder David Vernon), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 6, 750—752 (итал.)

Рассматриваются применения интегрального преобразования

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-y^2/4t)\, d\alpha(y)$$

и некоторых частных случаев символического оператора вида $F(\sqrt{D})$ ($\sqrt{D}$ обозначает оператор дифференцирования по Риману—Лиувиллю порядка 1/2) к теории теплопроводности. Н. А. Бразма

4160 К. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа. Дёч (Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace—Transformation. Doetsch Gustav. München, R. Oldenbourg, 1956, 198 S., ill.) (нем.)

Книга предназначена для широкого круга научно-технических работников, имеющих дело с применением преобразования Лапласа. В ней содержится минимум необходимых теоретических сведений о преобразовании Лапласа, весьма четко разобрано много числовых примеров, которые помогут читателю усвоить применение преобразования Лапласа при решении различных задач. В конце книги приведена большая таблица формул, по которым можно найти функции-оригиналы для различных функций-изображений. Изложение краткое, но ясное.

Книга содержит следующие главы: 1. Определение и общие свойства преобразования Лапласа. 2. Правила вычислений с преобразованием Лапласа. 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4. Разностные уравнения. 5. Дифференциальные уравнения в частных производных. Здесь рассматриваются уравнения теплопроводности и телеграфное уравнение. 6. Интегральные уравнения и интегральные соотношения. 7. Нахождение функции-оригинала по функции-изображению. 8. Асимптотическое поведение функций и вопросы устойчивости. В этой главе рассматриваются вопросы асимптотического разложения функции-изображения и функции-оригинала. М. К. Керимов

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4161. Гармонический анализ сечения трохоидальных волн. Раббено (L'analisi armonica del profilo delle onde trocoidali. Rabbeno Giorgio), Tecn. ital., 1956, **21**, № 6, 399—400 (итал.)

4162. Линейные системы цепи обратной связи и непрерывные дроби. Пуч-Адам (Les systèmes linéaires rétroactifs en chaîne et les fractions continues. Puig Adam P.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 495—513, Discuss. 514 (франц.)

Физическая система S, осуществляющая однозначное преобразование физической величины — функции времени $x(t)$ (функция входа) в физическую величину $y(t)$ (функция выхода), называется физически линейной и однородной относительно времени, если оператор F: $y(t)=F[x(t)]$ является линейным, непрерывным оператором, инвариантным относительно начала отсчета времени: $y(t-\tau)=F[x(t-\tau)]$. Преобразования такого вида представимы в виде:

$$y(t) = x(0)E(t) + \int_0^t E(t-\tau)\, dx(\tau),$$

где $E(t)=F[\sigma(t)]$, а $\sigma(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\leqslant 0,\\ 1 \text{ при } t>0\end{cases}$ или, если существует $E'(t)=K(t)$, то

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Физическая система S называется устойчивой, если из неравенства $|x(\tau)|<A$ следует неравенство $|y(t)|<B(A)$. Необходимое и достаточное условие устойчивости: $\int_0^t |K(t)\, dt < L$. Более удобное условие для исследования устойчивости может быть получено при помощи преобразования Лапласа.

Пусть $\xi(p)=L(x(p))$, $\eta(p)=L(y(p))$, $\varphi(p)=\frac{1}{L(K(t))}$, тогда $\xi(p)=\varphi(p)\eta(p)$; $\varphi(p)$ называется передаточной функцией оператора F и зависит только от вида оператора F. Если рассматривать только такие функции $\varphi(p)$, которые представимы в виде частного двух полиномов $\varphi(p)=M(p)/N(p)$, причем степень $M(p)$ больше степени $N(p)$, то необходимым и достаточным условием устойчивости физической системы S будет отсутствие корней у передаточной функции $\varphi(p)$ в правой полуплоскости. Обычно в авторегулировании выполнимость вышеуказанного условия проверяется графическим

методом Найквиста, который требует большого числа вычислений. Автор предлагает строить кривую Найквиста (образ мнимой оси) для функции $\varphi(p)$, представив ее предварительно в виде непрерывной дроби и графически осуществляя, затем, последовательно элементарные отображения: векторное сложение, подобие, симметрию и инверсию.

Далее автор говорит о возможности качественного и пока, конечно, грубого исследования явления гомеостаза, рассматривая живой организм, как многоконтурную систему автоматического регулирования, установив соотношения между множеством контролей, а следовательно, и звеньями непрерывной дроби, и условиями устойчивости живого организма и точностью их реакций при взаимодействии с внешней средой. В отличие от обычных методов исследования, автор предлагает не составлять заранее дифференциальные уравнения, описывающие данное явление, и сравнивать затем его решение с экспериментальной кривой, а наоборот по экспериментальным кривым составить дифференциальное или интегро-дифференциальное уравнение и затем попытаться дать интерпретацию его коэффициентам и, таким образом, составить качественную картину явления. Автор иллюстрирует реализацию этого предложения, обрабатывая экспериментальные кривые, касающиеся электропроводимости нерва.

Я. М. Каждан

4163. Пространственная фильтрация в оптике. О'Нилл (Spatial filtering in optics. O'Neill, Edward L.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 56—65, 98 (англ.)

Рассматривается аналогия между оптической и электрической фильтрациями, например оптический аналог отделения периодических изолированных сигналов от шума. Применяются интегральные преобразования с кратными интегралами, в частности преобразование Фурье, а также импульсная δ-функция. Библ. 25 назв.

Н. А. Бразма.

4164. Теория фильтрации. Заде (Theory of filtering. Zadeh L. A.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1953, 1, № 1, 35—51 (англ.)

Даются математические определения понятий идеального и оптимального фильтра. Идеальный фильтр определяется следующим образом: пусть $X=\{x(t)\}$, $Y=\{y(t)\}$ и $U=\{u(t)\}$ — некоторые функциональные пространства (без топологии), $*$ — операция, сопоставляющая каждому элементу $\{x, y\}$ прямого произведения $X\otimes Y$ элемент $u\in U$ (обозначаемый $u=x*y$). В таком случае идеальным фильтром называется операция F, сопоставляющая u элемент x:

$$F[u]\equiv F[x*y]=x.$$

Для определения оптимального фильтра пространство X метризуется (вводится расстояние $d(x, x_1)$) и фильтр F называется оптимальным для определенного класса $\mathfrak{F}$ отображений U на X, если $F\in\mathfrak{F}$ и $\min_{F_1\in\mathfrak{F}} d(x, F_1[u])=d(x, F[u])$.

После перечисления ряда очевидных свойств идеальных фильтров приводятся некоторые конкретные примеры (относящиеся к специальным типам операций $*$) и перечисляются три общих класса таких фильтров, формулируемые в абстрактных математических терминах. Общее определение оптимального фильтра конкретизируется в применении к случайным процессам $x(t)$ и $y(t)$ (операция $*$ понимается как простая сумма, а $d(x, x_1)$ — как средний квадрат разности $x-x_1$ на некотором интервале), после чего указывается один специальный класс нелинейных фильтров, более специальный, чем классы, рассмотренные в работах автора (J. Appl. Phys., 1953, 24, № 4, 396—404) и Кузнецова В. И., Стратоновича Р. Л., Тихонова В. И. (РЖМат, 1955, 5204). Никаких конкретных результатов работа не содержит.

А. М. Яглом.

См. также: 3683, 3684, 3891, 3895, 3972, 3981, 3984, 4020

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4165. Заметка о полных метрических пространствах. Юза (Poznámka o úplných metrických prostorech. Jůza Miloslav), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 3, 143—148 (чеш.; рез. русск.)

Пусть на множестве R вещественных чисел определена метрика

$$\rho(x, y)=|x-y|, \text{ если } |x-y|\leqslant 2,$$

$$\rho(x, y)=1+\frac{1}{|x-y|-1}, \text{ если } |x-y|>2.$$

Доказывается, что тогда R является полным линейным метрическим пространством, в котором существует убывающая последовательность замкнутых шаров без общей точки.

С. Н. Крачковский

4166. Одно замечание о топологических свойствах линейных нормированных пространств. Клии (A note on topological properties of normed linear spaces. Klee V. L., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 673—674 (англ.)

Подмножество линейного пространства называется линейно ограниченным, если его пересечение с любой прямой ограничено. Доказывается, что всякое бесконечномерное линейное нормированное пространство E содержит убывающую последовательность неограниченных, но линейно ограниченных, замкнутых выпуклых множеств, пересечение которых пусто. Отмечается, что, используя эту теорему вместо соответствующей теоремы В. Л. Шмульяна (Матем. сб., 1939, 5, 317—328), можно получить некоторые результаты, аналогичные содержащимся в другой статье автора (РЖМат, 1953, 1251). Формулируется теорема о существовании ряда гомеоморфизмов в E.

С. Н. Крачковский

4167. О равномерной выпуклости пространств L^p и l^p. Хаднер (On the uniform convexity of L^p and l^p. Hanner Olof), Arkiv mat., 1956, 3, № 3, 239—244 (англ.)

Доказывается, что в L^p и l^p справедливы неравенства

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\geqslant(\|x\|+\|y\|)^p+\\+|\|x\|-\|y\||^p \quad (1<p<2),$$

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant(\|x\|+\|y\|)^p+\\+|\|x\|-\|y\||^p, \quad p>2;$$

из этого выводится равномерная выпуклость пространств L^p и l^p.

В. К. Даядык

4168. О соотношениях между некоторыми пространствами последовательностей в произвольном банаховом пространстве. Мак-Артур (On relationships amongst certain spaces of sequences in an arbitrary Banach space. Mc Arthur C. W.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 192—197 (англ.)

Последовательность $s=\{s(i)\}$ элементов банахова пространства X называется безусловно суммируемой, если все перестановки ряда $\sum_i s(i)$ сходятся, и называется слабо безусловно суммируемой, если $\sum_i |f(s(i))|<\infty$ для любого $f\in X^*$. Элемент $x\in X$ называется инвариантной суммой последовательности s, если x есть сумма всех сходящихся перестановок ряда $\sum_i s(i)$. Пусть $U(X)$ — множество всех безусловно суммируемых, $B(X)$ — слабо безусловно суммируемых, $IS(X)$ — имеющих инвариантную сумму последовательностей. И. М. Гельфанд показал, что $s\in B(X)$ тогда и только тогда, когда $\sup \left\| \sum_F s(i) \right\|<\infty$ для любого конечного набора F индексов. Полагая

$$\|s\| = \sup_F \left\| \sum_F s(i) \right\|,$$

превратим $B(X)$ в банахово пространство.

Доказывается, что для банахова пространства X следующие три утверждения эквивалентны: 1) пространство X бесконечномерно; 2) разность $IS(X)\setminus B(X)$ не пуста; 3) $U(X)$ есть собственное подмножество множества $IS(X)$.

Для гильбертова пространства эквивалентность первых двух утверждений была показана Хадвигером (Hadwiger H., Math. Z., 1941, 47, 325—329).

Последовательность имеет сумму (слабую сумму) x, если $x=\sum_i s(i)$ (соответственно $f(x)=\sum_i f(s(i))$ для любого $f\in X^*$). Вводятся два подпространства пространства $B(X)$:

$$B_s(X)=\{s\in B(X),\ s \text{ имеет сумму}\},$$
$$B_w(X)=\{s\in B(X),\ s \text{ имеет слабую сумму}\}.$$

Показывается, что: А) оператор L, определенный на $B_w(X)$ и относящий последовательности s ее слабую сумму, линеен и имеет норму, равную единице; Б) в слабо полном пространстве X выполнены соотношения

$$U(X)=B_s(X)=B_w(X)=B(X)\subset IS(X),$$

причем включение собственное тогда и только тогда, когда X бесконечномерно.

Имеются и другие аналогичные результаты, относящиеся, в частности, к пространству c_0 последовательностей вещественных чисел, сходящихся к нулю.

В. И. Соболев

4169. Полугруппа Титчмарша. Краббе (The Titchmarsh semi-group. Krabbe G. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 219—225 (англ.)

Пусть $S_p=\{a\}$ — пространство последовательностей комплексных чисел $a=\{a_n\}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ с нормой $\|a\|_p=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}<\infty$ $(p>1)$. В S_p определяются: семейство операторов T_α (α — комплексный параметр), $T_\alpha a=c=\{c_n\}$, где

$$c_n=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+\nu}a_\nu \sin\alpha\pi/[(n+\alpha-\nu)\pi]$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots),$$

и оператор G, $Ga=x=\{x_n\}$, где

$$x_n=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+\nu}a_\nu/(n-\nu)$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots;\ \nu\neq n).$$

Доказывается, что: 1) T_α есть целая функция параметра α, т. е. $\varphi(T_\alpha x)$ есть целая функция от α, каковы бы ни были элемент $x\in S_p$ и элемент φ сопряженного пространства S_p^*; 2) $T_0 a=a$ и $T_\alpha T_\lambda a=T_{\alpha+\lambda}a$ для любого элемента $a\in S_p$ и любых комплексных чисел α, λ; 3) $T_\alpha=\exp(\alpha G)$ при всех комплексных α.

Д. А. Васильков

4170. Теоремы существования обратных матриц к бесконечным матрицам, принадлежащим некоторому кольцу преобразований. Аллен, Грин (Existence theorems for reciprocals of infinite matrices belonging to rings of transformations. Allen H. S., Green H. F.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 504—507 (англ.)

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы бесконечная матрица, принадлежащая кольцу некоторого типа, имела обратную. Приведем необходимые обозначения и понятия. Символ $(x, y)=\sum_i x_i y_i$ обозначает скалярное произведение последовательностей $x=\{x_i\}$ и $y=\{y_i\}$. Пусть α — пространство последовательностей $x=\{x_i\}$. Множество α^* всех последовательностей $y=\{y_i\}$, обладающих тем свойством, что ряд $\sum_i |x_i y_i|$ сходится для каждой последовательности $x\in\alpha$, называется пространством, дуальным пространству α. Символ $\Sigma(\alpha)$ обозначает множество таких матриц $A=(a_{n,k})$, что: 1) ряды $\sum_k |a_{n,k}x_k|$ $(n=1, 2,\ldots)$ сходятся для каждой последовательности $\{x_k\}\in\alpha$, 2) $A\alpha\subseteq\alpha$.

Предположим, что пространства α и $\beta\subseteq\alpha^*$ содержат все конечные последовательности. Символ $\Sigma_\beta(\alpha)$ обозначает множество матриц $A\in\Sigma(\alpha)$, имеющих сопряженные матрицы $A^*\in\Sigma(\beta)$ (т. е. такие матрицы, что $(Ax, y)=(x, A^*y)$ для каждых последовательностей $x\in\alpha$ и $y\in\beta$).

Доказывается, что матрица $A\in\Sigma_\beta(\alpha)$ имеет двустороннюю обратную матрицу тогда и только тогда, когда $A\alpha=\alpha$ и $A^*\beta=\beta$.

Если пространство α содержит все конечные последовательности и $\Sigma(\alpha)$ есть кольцо, то матрица $A\in\Sigma(\alpha)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда $A\alpha=\alpha$ и $A^*\alpha^*=\alpha^*$.

Кроме того, авторы рассматривают матрицы, отображающие пространства последовательностей со сходящимися рядами из степеней членов этих последовательностей.

L. Włodarski

4171. Линейные преобразования и бесконечные матрицы. Аллен (Linear transformations and infinite matrices. Allen H. S.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 501—504 (англ.)

Рассматриваются линейные преобразования пространств последовательностей в себя. В пространстве всех конечных последовательностей (т. е. последовательностей $\{x_n\}$ с конечным числом отличных от нуля элементов) каждое преобразование этого рода определяется бесконечной матрицей. В пространстве, содержащем множество конечных последовательностей как собственное подмножество, существуют линейные преобразования этого пространства в себя, которые не определяются матрицами. Если пространство α последовательностей содержит все конечные последовательности, то кольцо линейных преобразований T пространства α в себя, имеющих сопряженное пре-

образование T^* пространства α^*, дуального α, можно отождествить с некоторым кольцом бесконечных матриц. Определения дуального пространства и сопряженной операции см. в реф. 4170. L. Włodarski

4172. Определители бесконечного порядка и системы бесконечного числа линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Хуан-и-Эрнандес (Los determinantes infinitos y los sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incognitas. Juan y Hernandez Enrique), Rev. mat. hisp. amer., 1956, 16, № 1—2, 15—48 (исп.)

Дается понятие абсолютно сходящегося определителя бесконечного порядка. Устанавливаются достаточные условия абсолютной сходимости определителя бесконечного порядка и всех его миноров. На такие определители переносятся обычные свойства определителей конечного порядка. Имеются применения к решению системы бесконечного числа линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Э. Апарисио

4173. Некоторые свойства поверхности единичной сферы и применения к решению задачи единственности многочлена наилучшего приближения в любых пространствах Банаха. Зингер (Proprietăţile suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach carecare. Singer Ivan), Studii şi cercetări mat., 1956, 7, № 1—2, 95—145 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются свойства единичной сферы произвольного пространства Банаха при помощи элементов сопряженного пространства. Полученные результаты применяются к вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в пространствах Банаха. Основной результат (теорема 2.2): Пусть в банаховом пространстве E заданы элементы $x_1, \ldots, x_n$. Для того чтобы каждый элемент x имел единственный многочлен наилучшего приближения $p = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, необходимо и достаточно, чтобы ни для каких непротивоположных экстремальных точек $f_1, \ldots, f_n$ единичной сферы S^* сопряженного пространства E^* нельзя было подобрать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $\left(\sum_1^n |\lambda_i| = 1\right)$ со следующими свойствами:

1) $(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$;

2) для некоторого многочлена $p_0 \neq 0$

$$\bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn} \lambda_i, \ \|x\| = 1, \ \|x + p_0\| = 1\} \neq 0.$$

С. И. Зуховицкий

Примечание редакции. Автор сообщил редакции, что доказательство основного результата в реферируемой работе неполно. Полное доказательство будет опубликовано в 1957 г. в том же журнале. Автор отмечает также, что теорема 2.1, дающая другой критерий единственности многочлена наилучшего приближения, неточна и будет исправлена в следующей публикации.

4174. Заметка об f-полноте. Касахара (A note on f-completeness. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 7, 572—575 (англ.)

Автор сообщает, что в другой его работе, которая должна быть опубликована в Math. Japonicae, 3, № 2, им введено понятие f-полноты для локально плоских (locally flat) линейных топологических пространств с заданным семейством неархимедовых полунорм. В реферируемой заметке устанавливается ряд предложений, касающихся f-полноты, в частности доказываются некоторые теоремы о распространении, непрерывных линейных отображений в линейных топологических пространствах. Б. З. Вулих

4175. Строгая отделимость выпуклых множеств. Клиа (Strict separation of convex sets. Klee V. L., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 735—737 (англ.)

Пусть E — локально выпуклое линейное (вещественное) топологическое пространство и A — его локально компактное выпуклое замкнутое подмножество. Следующие два утверждения эквивалентны: 1) для любой опорной гиперплоскости H к A пересечение $H \cap A$ не содержит луча; 2) всякое выпуклое замкнутое подмножество B из $E \setminus A$, отделимое гиперплоскостью от A, можно отделить от A гиперплоскостью, не содержащей точек множества A. Д. П. Мильман

4176. Слабо вполне непрерывные банаховы $*$-алгебры. Огасавара, Ёсинага (Weakly completely continuous Banach $*$-algebras. Ogasawara Tôzirô, Yoshinaga Kyôichi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, A18, № 1, 15—36 (англ.)

Банахова $*$-алгебра A называется B^*-алгеброй, если норма $\|x\|$ в ней удовлетворяет условию $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, C^*-алгеброй, если, кроме того, для каждого $x \in A$ элемент x^*x обладает квазиобратным, и A^*-алгеброй, если в A существует вспомогательная норма $|x|$, удовлетворяющая, помимо обычных условий, также условию β_k): $|x|^2 \leqslant k\,|x^*x|$ для некоторой постоянной k. Две вспомогательные нормы $|x|$ и $|x|_1$ называются эквивалентными, если эквивалентны условия $|x_n| \to 0$ и $|x_n|_1 \to 0$. Устанавливаются условия, при которых вспомогательная норма A^*-алгебры A единственна с точностью до эквивалентности. В частности, это имеет место, если выполняется одно из условий: а) для любых a, $x \in A$ и некоторой постоянной c имеет место неравенство $\|ax\| \leqslant c\,\|a\| \cdot |x|$; б) объединение минимальных правых идеалов из A плотно в A. Остается невыясненным, обладает ли этим свойством любая A^*-алгебра.

Банахова алгебра A называется слабо вполне непрерывной (с. в. н. алгеброй), если умножения справа и слева на элементы из A являются слабо вполне непрерывными операторами. B^*-алгебра A является с. в. н. алгеброй в том и только в том случае, если она есть B^*-сумма C^*-алгебр, каждая из которых является алгеброй всех вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. Если банахова $*$-алгебра A удовлетворяет дополнительно условию β_k), то A является с. в. н. алгеброй тогда и только тогда, когда A — дуальная алгебра (в смысле Капланского).

Для в. н. банаховой $*$-алгебры эквивалентны следующие условия: 1) алгебра A полупростая, и из $x^*x = 0$ следует $x = 0$; 2) A является плотной подалгеброй вполне непрерывной B^*-алгебры $\mathfrak{A}$; 3) A является A^*-алгеброй. Любая в. н. A^*-алгебра A 1) обладает единственной с точностью до эквивалентности вспомогательной нормой, 2) является дуальной тогда и только тогда, когда выполняется условие б), и для каждого $x \in A$ замыкание множества xA содержит x, 3) является конечномерной в том и только в том случае, если она обладает единицей. Любая дуальная A^*-алгебра A 1) обладает единственной с точностью до эквивалентности вспомогательной нормой, 2) является плотной подалгеброй дуальной B^*-алгебры $\mathfrak{A}$, определяемой однозначно, с точностью до $*$-изоморфизма. При этом следующие условия эквивалентны: 1) алгебра A вполне непрерывна, 2) в A существует полная ортогональная система, состоящая из самосопряженных идемпотентных элементов, 3) алгебра $\mathfrak{A}$ вполне непрерывна, 4) алгебра A сильно полупростая (в смысле Сигала).

Пусть A — с. в. н. A^*-алгебра с вспомогательной нормой $|x|$, удовлетворяющей условию $\|xy\| \leqslant c\,|x| \cdot \|y\|$, и пусть еще выполнено одно из условий: 1) для каждого $x \in A$ замыкание множества xA содержит x, 2) алгебра A рефлексивна. Тогда алгебра A дуальна и является плотным идеалом в своем пополнении $\mathfrak{A}$ по норме $|x|$; алгебра $\mathfrak{A}$ эквивалентна с. в. н. B^*-алгебре; если $\{e_\alpha\}$ — максимальное семей

ство взаимно ортогональных самосопряженных идемпотентных элементов, то для любого $x \in A$ ряд $\Sigma e_\alpha x$ сходится по норме к x.

Дуальная A^*-алгебра A с вспомогательной нормой $|x|$ называется алгеброй первого рода, если она является идеалом в своем пополнении по норме $|x|$. В противном случае она называется алгеброй второго рода. Любая $*$-замкнутая подалгебра алгебры первого рода также является алгеброй первого рода. Для того чтобы дуальная A^*-алгебра была алгеброй первого рода, необходимо и достаточно, чтобы норма $\|x\|_1 = \sup_y \|xy\|$ $(\|y\| = 1)$ удовлетворяла условию β_k). Если G — бесконечная компактная группа, то алгебра C непрерывных функций на G, нормированных по минимуму абсолютного значения, и алгебра L_1 абсолютно интегрируемых функций на G являются алгебрами второго рода. Рассматривается также кратко случай коммутативных алгебр. М. И. Граев

4177. Структуры проекций в AW^*-алгебрах. Сасаки (Lattices of projections in AW^*-algebras. Sasaki Usa), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 1, 1—30 (англ.)

Элемент банаховой B^*-алгебры называется проекцией, если он самосопряжен и идемпотентен. Если левый аннулятор произвольного множества $S \subset A$ является главным идеалом, порожденным некоторой проекцией, то B^*-алгебра A называется AW^*-алгеброй. Оказывается, что множество A_p всех проекций AW^*-алгебры A является полной структурой с ортодополнениями, в которой для любых двух ортогональных элементов a, b из $x \leqslant b$ следует, что $(x \cup a) \cap b = x \cup (a \cap b)$. Центр структуры A_p состоит из проекций, принадлежащих центру AW^*-алгебры A, и является полной булевой алгеброй.

Проекция $a = xx^*$ алгебры A называется конечной, если из $x^*x \leqslant a$ следует, что $a = x^*x$. Оказывается, что множество всех конечных проекций AW^*-алгебры A является общей непрерывной геометрией.

Основное содержание работы — обобщение результатов Капланского о AW^*-алгебрах, единица которых является конечной проекцией, на любые AW^*-алгебры. А. Х. Лившиц

4178. Подалгебры алгебры всех комплекснозначных непрерывных функций на окружности. Уэрмер (Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle. Werner John), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 225—242 (англ.)

Замкнутая подалгебра $\mathbf{M}$ алгебры $\mathbf{C}$ всех непрерывных функций на окружности $|\lambda| = 1$ называется максимальной, если $\mathbf{M}$ разделяет окружность (для $\lambda_1 \neq \lambda_2$ найдется $f(\lambda) \in \mathbf{M}$, $f(\lambda_1) \neq f(\lambda_2)$) и если не существует другой замкнутой подалгебры $\mathbf{M}' \supset \mathbf{M}$ $(\mathbf{M}' \neq \mathbf{C})$. Описывается широкий класс максимальных подалгебр алгебры $\mathbf{C}$, примеры которых даны автором в двух заметках (РЖМат, 1955, 2294 и 4548). Пусть $\mathfrak{M}$ — область римановой поверхности, ограниченная простой замкнутой аналитической кривой γ, так что $\mathfrak{M} + \gamma$ — компакт. Так как кривая γ гомеоморфна окружности, то $\mathbf{C}$ можно рассматривать как пространство непрерывных комплекснозначных функций на γ. Пусть $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{C}$, состоящая из граничных значений функций, аналитических на $\mathfrak{M}$ и непрерывных на $\mathfrak{M} + \gamma$.

Основной результат (теорема 2): $\mathfrak{A}$ есть максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{C}$.

Доказательство опирается на теорему 1, в которой дается общий вид линейного функционала на $\mathbf{C}$, исчезающего на $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — области римановых поверхностей указанного выше типа, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — соответствующие подалгебры непрерывных функций. В теореме 3 устанавливается, что для изоморфности алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ необходима и достаточна конформная эквивалентность областей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

Примечание референта. Результат, аналогичный теореме 3 для случая областей плоскости, содержится в работах Берса (Bers L., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, № 4, 311—315) и Рудина (РЖМат, 1957, 2233). Л. А. Маркушевич

4179. О нормальных операторах и их сопряженных. Бек, Патнам (A note on normal operators and their adjoints. Beck W. A., Putnam C. R.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 213—216 (англ.)

Пусть A — ограниченный и N — нормальный операторы, для которых $AN = N^*A$. Доказываются следующие теоремы:

1. Если A имеет ограниченный обратный оператор и при полярном представлении $A = |A|U$ спектр оператора U содержится в некотором открытом полукруге, то $N = N^*$.

2. Если для мнимого числа z одно из чисел z, $\bar{z}$ не принадлежит спектру оператора N, то $AN = NA$.

L. Pukánszky

4180. О приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду. Сахнович Л. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**, М., АН СССР, 1956, 120—122

Находятся достаточные условия, при которых несамосопряженный оператор A класса $i\Omega$ (обозначения и термины см. РЖМат, 1954, 5660) с непрерывным спектром приводится к диагональному виду. Для этого находятся условия, достаточные для приведения к диагональному виду «треугольной модели» оператора A, унитарно эквивалентной последнему (РЖМат, 1954, 5660).

Полученные результаты используются для доказательства — при некоторых условиях — ограниченности по норме (сверху и снизу) решения уравнения Шрёдингера. Д. Ф. Харазов

4181. Об одной минимум-задаче проблемы моментов. Зухович С. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**, М., АН СССР, 1956, 83—84

Сообщается о результатах работы автора (РЖМат, 1957, 1583). Г. П. Акилов

4182. Некоторые свойства преобразования Фурье на полупростых группах Ли. Эренпрейс, Маутнер (Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. I. Ehrenpreis L., Mautner F. I.), Ann. Math., 1955, **61**, № 3, 406—439 (англ.)

Пусть G — группа конформных отображений внутренности единичного круга, $K \subset G$ — группа вращений круга и A — совокупность таких измеримых функций на G, что $f(k_1 g k_2) = f(g)$ при любых $k_1, k_2 \in K$. Сопоставим каждому комплексному числу s и каждому элементу $g \in G$ оператор $U(g, s)$, определяемый формулой

$$[U(g, s)\, a](z) = \left| \frac{dgz}{dz} \right|^s a(gz),$$

где $a(z) = a(\theta)$ — функция на единичной окружности $z = e^{2\pi i\theta}$. Тогда $U(g, s)$ является представлением группы G, причем унитарным, если $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ (Bargmann V., Ann. Math., 1947, 48, 568—640). Преобразованием Фурье функции $f(g)$ из A называется функция $F(s) = \int f(g)\, \varphi(g, s)\, dg$, где $\varphi(g, s) = \langle U(g, s)\, 1, 1 \rangle$. Функция $\varphi(g, s)$ переменного s является целой функцией экспоненциального порядка роста, причем $\varphi(g, s) = \varphi(g, 1 - s)$; $\bar{\varphi}(g, s) = \varphi(g, \bar{s})$, а при фиксированном s

функция $\varphi(g, s)$ переменного g принадлежит A. В полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$ имеем $|\varphi(g, s)| \leqslant 1$. Если $f(g) \in A \cap L_1 \equiv A_1$, то $F(s)$ является аналитической функцией внутри этой полосы и непрерывной на ее границе. Устанавливается двойственность между некоторыми линейными топологическими пространствами функций на группе G и пространствами функций от s, аналитических в полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$. Если $f(g) \in A_1$, то $\lim\limits_{t \to \pm\infty} |F(\sigma + it)| = 0$ равномерно при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Если при этом функция $F(s)$, аналитическая в полосе $-\delta \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1 + \delta$, не обращается в этой полосе в нуль и удовлетворяет некоторым условиям на бесконечности, то идеал, порожденный функцией $f(g)$ в A_1, плотен в A_1. Для функций из A, обращающихся в нуль вне некоторого компакта, доказан аналог теоремы Пейли—Винера. Н. Я. Виленкин

4183. Континуальный аналог леммы Шура и его применение к формуле Планшереля для комплексных классических групп. Наймарк М. А., Изв. АН СССР., сер. матем., 1956, 20, № 1, 3—16.

Подробное изложение опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1956, 3937). М. И. Граев

4184. О характерах полупростой группы Ли. Харриш-Чандра (On the characters of a semisimple Lie group. Harisch-Chandra), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 5, 389—396 (англ.)

Пусть $\pi(x)$ — квазипростое неприводимое представление связной полупростой группы Ли G в гильбертовом пространстве. Если $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на G, то, как известно, оператор $\int f(x)\, \pi(x) dx$ (интегрирование ведется по инвариантной мере на G) имеет след $T_\pi(f)$. В работе устанавливается, что на множестве G' регулярных элементов из G существует такая аналитическая функция $F_\pi(x)$, что $T_\pi(f) = \int_{G'} f(x) F_\pi(x)\, dx$ для финитных бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на G'. Для функции F_π существует формула, подобная формуле Вейля для характеров компактных полупростых групп и формулам И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка для характеров классических групп. Если π_0 — такое квазипростое неприводимое представление группы G, что F_{π_0} не есть тождественный нуль, то с точностью до инфинитезимальной эквивалентности существует лишь конечное число квазипростых неприводимых представлений π, для которых $F_\pi = F_{\pi_0}$.

Примечание референта. Явные формулы для характеров неприводимых унитарных представлений некоторых классов вещественных простых групп Ли были получены в работе И. М. Гельфанда и референта (РЖМат, 1956, 5990) и в работе референта (РЖМат, 1956, 6706). М. И. Граев

4185. Интегрируемые и интегрируемые с квадратом представления полупростой группы Ли. Харриш-Чандра (Integrable and square-integrable representations of a semisimple Lie group. Harish-Chandra), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 5, 314—317 (англ.)

Рассматривается связная полупростая группа Ли G с конечным центром. Неприводимое унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$ называется интегрируемым (интегрируемым с квадратом), если в $\mathfrak{X}$ существует такой элемент $\psi \neq 0$, что функция $(\psi, \pi(x)\psi)$ элемента $x \in G$ интегрируема (интегрируема с квадратом) относительно меры Хара dx на G. Считая, что мера Хара dx на G каким-либо фиксированным способом нормирована, автор определяет для интегрируемых с квадратом представлений положительную константу d_π:

$$\frac{1}{d_\pi} = \int_G |(\psi, \pi(x)\psi)|^2\, dx,$$

где $\|\psi\| = 1$. Устанавливается, что для характера $T_\pi(f)$ оператора $\pi(f) = \int f(x)\pi(x)\, dx$, определяемого с помощью интегрируемого с квадратом неприводимого унитарного представления π, где $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, имеет место соотношение

$$T_\pi(f) = d_\pi \int_G dx \int_G f(xyx^{-1})(\varphi, \pi(y)\varphi)\, dy,$$

где $\|\varphi\| = 1$. Далее рассматривается простая некомпактная группа Ли G, у которой первое число Бетти есть 1 и выполняются некоторые дополнительные условия для корней ее алгебры Ли. В этом случае для d_π получается выражение, аналогичное формуле Вейля для степеней конечномерных неприводимых представлений в терминах старших весов. Утверждается, что d_π есть коэффициент, с которым входит $\|\pi(f)\|^2$ в качестве дискретного слагаемого в формулу Планшереля. Доказательства не приводятся.

М. И. Граев

4186. Проблема 111 Биркгофа. Исбелл (Birkhoff's problem 111. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 217—218 (англ.)

Предлагается решение проблемы 111 из книги Г. Биркгофа «Теория структур» (М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 363), касающейся обобщения на бесконечномерный случай представления стохастической матрицы порядка n в виде среднего взвешенного матриц (порядка n), осуществляющих подстановку.

Д. А. Васильков

4187. О методе С. А. Чаплыгина. Балуев А. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 27—42

Доказывается теорема об уравнениях в полуупорядоченных пространствах, представляющая аналог теоремы С. А. Чаплыгина о решении дифференциальных уравнений (Собр. соч., т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1948). Пусть X и U — некоторые K-линеалы, P — произвольный оператор из X в U, T_1 и T_2 — аддитивные и однородные операторы из X в U (однородность автором фактически не используется), x_0, y_0 — некоторые элементы из X. Пусть, далее, выполнены условия: 1) $x_0 \leqslant y_0$; 2) $Px_0 \leqslant 0 \leqslant Py_0$; 3) $Py_0 + T_2(x - y_0) \leqslant Px \leqslant Px_0 + T_1(x - x_0)$ для любого x из отрезка $[x_0, y_0]$; 4) операторы T_1 и T_2 имеют положительные обратные. Тогда элементы x_1 и y_1, найденные соответственно из уравнений $Px_0 + T_1(x - x_0) = 0$, $Py_0 + T_2(x - y_0) = 0$, удовлетворяют условиям $x_0 \leqslant x_1 \leqslant y_1 \leqslant y_0$, $Px_1 \leqslant 0 \leqslant Py_1$, и всякое решение уравнения $Px = 0$, лежащее в промежутке $[x_0, y_0]$, принадлежит также и промежутку $[x_1, y_1]$. Далее операторы T_1 и T_2 конкретизируются различными способами и изучаются получаемые при этом процессы последовательных приближений. При некоторых условиях доказывается сходимость этих процессов. В частности, исследуются процесс Ньютона и модифицированный процесс Ньютона.

Б. З. Вулих

4188. Одно замечание о мере Хара. Дейвис (A note on Haar measure. Davis Harry F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 318—321 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Если G — произвольная локально компактная топологическая группа, а m_G — левая мера Хара в G, то G содержит компактную группу K, подпространство E (могущее не

быть подгруппой), гомеоморфное конечномерному евклидову пространству, и дискретное подмножество D, обладающие тем свойством, что отображение θ, определяемое формулой $\theta(a, b, c) = abc$, представляет собой гомеоморфизм декартова произведения $D \times E \times K$ на G и переводит произведение $m_D \times m_E \times m_K$ в m_G, где m_D — дискретная мера в D, m_E — лебегова мера в E (при надлежащем выборе координат в E), m_K — мера Хара в K.

Д. А. Васильков

4189. Математические проблемы, связанные со статистической механикой турбулентных потоков. Кампе-де-Ферье (Problèmes mathématiques posés par la mécanique statistique de la turbulence. Kampé de Fériet J.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 3, Groningen—Amsterdam, 1956, 237—242 (франц.)

Обзор работ Биркгофа (Birkhoff G., Colloque Algèbre et Théorie des Nombres, Paris, 1949, 143—153), Дюбрей-Жакотен (РЖМат, 1955, 3651, 3652; 1957, 1606), Мой (РЖМат, 1956, 4677) и автора (Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1949, 63, 156—172; РЖМат, 1957, 1605, 1607), посвященных введению для некоторых классов функциональных пространств понятия «среднего значения», удовлетворяющего известным требованиям, наложенным на это понятие в классической работе Рейнольдса (см. Ламб Г., Гидродинамика, М.—Л., 1947) по статистической теории турбулентности.

А. М. Яглом

4190. Об аналитическом продолжении обобщенных функций. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 717—719

Обобщенная комплекснозначная функция $\tilde{f}(E)$ называется аналитически продолжимой в верхнюю полуплоскость плоскости $z = E + i\Gamma$, если существует аналитическая функция $\tilde{f}(E + i\Gamma)$, стремящаяся при $\Gamma \to 0$ к $\tilde{f}(E)$ в смысле слабой сходимости и допускающая оценку

$$|\tilde{f}(E + i\Gamma)| \leqslant A_0(\delta)|E|^m + A_1(\delta)|E|^{m-1} + \ldots + A_n(\delta),$$

где $\delta \leqslant \Gamma$, m — целое положительное число, $A_i(\delta)$ — вещественные постоянные, зависящие только от δ.

Доказана следующая теорема: Для того чтобы обобщенная комплекснозначная функция $\tilde{f}(E)$ допускала аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье $f(t)$ функции $\tilde{f}(E)$ обращалось в нуль при $t < 0$.

Эта теорема является обобщением соответствующей известной теоремы для функций $L^2(-\infty, \infty)$. Результат представляет интерес для проблемы обоснования так называемых дисперсионных соотношений квантовой теории поля. Математической основой указанных дисперсионных соотношений является интегральная формула Коши, применимость которой обусловлена возможностью аналитического продолжения матричных элементов матрицы рассеяния (являющихся обобщенными функциями) на комплексную плоскость.

Д. В. Ширков

4191. Замечание о расширении умножения обобщенных функций. Исихара (Note on an extension of multiplication of distributions. Ishihara Tadashige), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 141—146 (англ.)

Невозможность построения теории умножения обобщенных функций, удовлетворяющего обычным требованиям, заставляет искать более общие определения. Рассматриваются фиксированная обобщенная функция $Q \in \mathfrak{D}'$ ($\mathfrak{D}$ — пространство финитных функций, $\mathfrak{D}'$ — двойственное пространство) и линейное пространство $\mathfrak{Q} = \{\varphi Q \mid \varphi \in \mathfrak{D}\}$, являющееся подпространством пространства $\mathfrak{D}'$, причем φQ означает обычное произведение в $\mathfrak{D}'$. Далее вводится пространство $\mathfrak{P}$, содержащее $\mathfrak{D}[=\{\alpha\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}, \alpha \in \mathfrak{E}\}]$ и $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{E}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций). Обобщенное умножение вводится затем согласно равенствам

$$\langle T, \varphi\alpha\rangle_{\mathfrak{P}', \mathfrak{P}} = \langle \alpha \circ T, \varphi\rangle \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathfrak{D}, \ \alpha \in \mathfrak{E},$$

$$\langle T, \varphi Q\rangle_{\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}} = \langle Q \circ T, \varphi\rangle \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{P}'$ — пространство, двойственное к $\mathfrak{P}$, а символ $\langle\ \rangle$ означает скалярное произведение.

Для возможности определить пространство $\mathfrak{P}$ таким образом, чтобы $Q \circ T$ и $\alpha \circ T$ принадлежали $\mathfrak{D}'$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle T, \varphi Q\rangle$ и $\langle T, \varphi\alpha\rangle$ были непрерывными линейными функционалами для $\varphi \in \mathfrak{D}$.

Доказано, что если отображения $\varphi \to \varphi\alpha$ и $\varphi \to \varphi Q$ из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{P}$ непрерывны, то произведение $Q \circ T$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $Q \circ T = \alpha Q$ ($\alpha \in \mathfrak{E}$) или когда $Q \circledcirc T$ есть предел в $\mathfrak{D}'$ выражений $\alpha_\lambda Q$, где $\alpha_\lambda \in \mathfrak{E}$.

О. С. Парасюк

4192. О кратных распределениях. Исихара (On multiple distributions. Ishihara Tadashige), Osaka math. J., 1954, 6, № 2, 187—205 (англ.)

Пусть $\mathfrak{D}^{(\pi)}(x)$, $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$, $\mathfrak{D}^{(\pi)}(x, t)$ — пространства $\mathfrak{D}^\pi$ (в обозначениях Лорана Шварца), определенные соответственно на евклидовых пространствах $R^n(x)$, $R^m(t)$, $R^{n+m}(x, t)$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$) размерностей n, m, $n + m$ соответственно, а $\mathfrak{D}^{(\pi)'}(x)$, $\mathfrak{D}^{(\pi)'}(t)$, $\mathfrak{D}^{(\pi)'}(x, t)$ — их дуальные (сопряженные) пространства, снабженные сильной топологией; сходимость в пространствах $\mathfrak{D}^{(\pi)'}$ обозначается символом $\xrightarrow{(\pi)'}$. При фиксированных ν и $Q \in \mathfrak{D}^{(\mu)'}(t)$, $\mu < \nu$, всякая последовательность $\{\varphi_j(t) : \varphi_j(t) \in \mathfrak{D}^{(\pi)}(t), \varphi_j(t) \xrightarrow{(\nu)'} Q\}$ называется (ν, Q)-последовательностью; совокупность всех (ν, Q)-последовательностей (при фиксированных ν и Q) обозначается через $\mathfrak{B}'(t)$, а через $\mathfrak{B}^0(t)$ обозначается совокупность всех множеств $B^\circ(t)$ вида $B^\circ(t) = B(t) \cup \bigcup_{i=1}^{k} \lambda_i B_i'(t)$, $k = 1, 2, \ldots$; $B \in B_\pi(t)$, $B_i' \in \mathfrak{B}'(t)$, где $B_\pi(t)$ — совокупность всех ограниченных множеств в $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$.

В $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$ вводится новая топология, в которой открытыми считаются такие множества G, что для всякого $g \in G$ существует выпуклое множество $N \subset G$, удовлетворяющее условию $g + \lambda B \subset N$ для всякого $B \in \mathfrak{B}^\circ(t)$ и некоторого $\lambda > 0$, зависящего от B. Пространство $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$ в этой новой топологии обозначается через $\mathfrak{D}_Q(t)$; аналогично строится пространство $\mathfrak{D}_Q(x, t)$ и аналогичным образом в $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$ и $\mathfrak{D}^\pi(x, t)$ вводится топология по семейству Λ распределений Q_λ, для которых соответствующие ν_λ меньше фиксированного ν. Соответствующие пространства обозначаются через $\mathfrak{D}_{Q_\lambda}$. Наконец $\mathfrak{D}_P$ обозначает любое из пространств $\mathfrak{D}_Q$, $\mathfrak{D}_{Q_\lambda}$, а $'\mathfrak{D}_P$ — замыкание пространства $\mathfrak{D}^{(\nu)}$ в сильной топологии дуального пространства $\mathfrak{D}_P'$.

Кратным распределения $T \in {}'\mathfrak{D}_Q(x, t)$ и распределения $Q \in \mathfrak{D}^{(\pi)'}(t)$ называется такое распределение $T_Q \in \mathfrak{D}^{(\pi)'}(x)$, что для $\varphi \in \mathfrak{D}^{(\pi)}(x)$, $\langle T_Q, \varphi\rangle = \lim_{\substack{\mathfrak{D}_Q \\ F \to T}} \langle f, \varphi Q\rangle$.

Доказывается, что:

1. Если $T \in {}'\mathfrak{D}_Q$, то T непрерывно относительно каждой $\{\nu, \rho Q\}$-последовательности равномерно относительно φ на ограниченных множествах в $\mathfrak{D}^{(\pi)}(x)$, где ρ — произвольное число, и предел, определенный этой последовательностью, совпадает с ρT_Q. Обратно, если $T \in \mathfrak{D}^{(\pi)'}(x, t)$ и если для любой $\{\nu, \rho Q\}$-последовательности $\{\Phi_i\}$, где $\rho = 0,1$, числа $\langle T, \varphi\Phi_i\rangle$ образуют последовательность Коши равномерно относительно φ на ограниченных множествах в $\mathfrak{D}^{(\pi)}(x)$, то $T \in {}'\mathfrak{D}_Q$.

2. Отображение $T \to T_Q$ есть непрерывное линейное отображение из $\mathfrak{D}_P(x, t)$ в $\mathfrak{D}^{(\pi)'}(x)$.

3. Пусть D^σ — дифференциальный оператор порядка σ в $\mathfrak{D}^{(\pi)}(t)$, а D^{σ^*} — сопряженный оператор в $\mathfrak{D}^{(\pi)'}(t)$. Если $T \in {}'\mathfrak{D}^{(\pi)'}_{D^{(\sigma)}(P)}(\pi, \nu, \mu)$, то $D^{\sigma^*}T \in {}'\mathfrak{D}^{(\pi+\sigma)'}_P(\pi+\sigma, \nu-\sigma, \mu-\sigma)$ и $T_{D_t Q_\lambda} = (D^* T)_{Q_\lambda}$.

Кроме того, даются условия, при которых данное распределение T принадлежит пространству ${}'\mathfrak{D}_{D^\sigma P}$, и изучаются свертка и произведение кратных распределений.

Применение этих результатов к тому случаю, когда Q есть δ-функция Дирака или ее производная $\delta^{(\mu)}$, а $\lambda = t$, $a \leqslant t \leqslant b$, приводит к теоремам о соотношении между распределениями T_t в $\mathfrak{D}^\pi(x)$, зависящими от параметра t, и распределениями $\widetilde{T}$ в $\mathfrak{D}^\pi(x, t)$. Эти теоремы применяются к уравнению

$$\partial U(x, t)/\partial t + \sum_{\rho \leqslant \sigma} A_\rho(t) D_x^\rho U(x, t) = B(x, t),$$

где B, A, U — матрицы; устанавливается связь между решениями этого уравнения, рассматриваемыми как зависящие от параметра t распределения в $\mathfrak{D}^\pi(x)$, и решениями, рассматриваемыми как распределения в $\mathfrak{D}^\pi(x, t)$.

М. А. Наймарк

4193. Добавление к статье «О кратных распределениях». **Исихара** (Addenda to «On multiple distributions». Ishihara Tadashige), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 129—130 (англ.)

Указывается на возможность обобщений результатов предыдущей статьи автора (реф. 4192).

О. С. Парасюк

4194. Построение фундаментальной системы дифференциальных физических операторов для вселенной с простой основной группой. **Фантаппье** (Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice. Fantappiè Luigi), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 19, № 5, 213—217 (итал.)

Известно, что уравнение Клейна—Гордона для бесспиновой частицы с массой μ получается из соотношения

$$E^2/c^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \mu^2 c^2 \qquad (1)$$

подстановкой

$$E \to \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_k \to \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Таким образом, из соотношения (1) макроскопической физики получаются (как производное понятие) уравнения квантовой теории поля.

Автор считает такое положение дел неудовлетворительным и строит с помощью общих постулатов теорию квантовой вселенной, основная, группа которой проста и охватывает, в частности, группу Лоренца. В этой теории уравнения поля получаются из других соображений, не апеллирующих к макроскопической физике.

О. С. Парасюк

4195 К. Введение в теорию обобщенных функций. **Гальперин И.** На основе лекций Л. Шварца. Перев. с англ., М., Изд-во ин. лит., 1954, 64 стр., 2 р. 15 к.

Излагаются основные понятия теории распределений Л. Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1950—1951). Обобщенная функция (распределение) определяется как линейный непрерывный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторого отрезка. Среди обобщенных функций содержатся все непрерывные и все локально суммируемые по Лебегу функции.

Вводится понятие производной обобщенной функции; доказывается, что каждая обобщенная функция имеет производные всех порядков (§ 2), также являющиеся обобщенными функциями. Определяются примитивная для обобщенной функции (§ 3) и (при некоторых условиях) произведение обобщенных функций F_1 и F_2: если $F_1^{(n)}$ для некоторого n является функционалом типа функции, а $F_2 = f_2^{(n)}(x)$ есть n-я производная функции $f_2(x)$, и если $F_1^{(n)}$, f_2 и $F_1^{(n)} f_2$ суммируемы, то произведение $F_1 \cdot F_2$ определяется формулой

$$F_1 \cdot F_2 = (F_1 f_2)^{(n)} - \binom{n}{1}(F_1' f_2)^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p \binom{n}{p}(F_1^{(p)} f_2)^{(n-p)} + \ldots + (-1)^n F_1^{(n)} f_2.$$

Доказывается теорема Л. Шварца о том, что каждая обобщенная функция на отрезке может быть представлена в виде производной конечного порядка от некоторой суммируемой функции точки (§ 5). Определяется сходимость последовательности обобщенных функций и доказывается полнота пространства обобщенных функций относительно этой сходимости (§ 6). В § 8 рассматриваются обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями; доказывается, что решения при отсутствии особенностей всегда являются обычными функциями. В §§ 9—10 теория распространяется на функции от нескольких независимых переменных. В §§ 11—12 рассматриваются свертка обобщенных функций и ряды Фурье для обобщенных функций.

Книга содержит значительно меньше теоретического материала и примеров, чем книга Л. Шварца.

В предисловии редактора перевода обосновывается необходимость обобщения классического понятия функции и указываются работы в этом направлении, предшествовавшие теории распределений Л. Шварца. В частности, указывается, что в 1936 г. С. Л. Соболевым были введены «обобщенные функции» как линейные функционалы на совокупности финитных m раз дифференцируемых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, которые были применены им для решения некоторых задач математической физики.

В добавлении редактора перевода определяется преобразование Фурье обобщенной функции, а также освещается дальнейшее развитие теории в работах советских математиков (1953—1954 гг.). В. М. Борок

4196 К. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. **Майер** (Operatori liniari în spaţii unitare. Mayer M. E., Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 128 p., 3. 85 lei), Bul. bibliogr., 1956, А, № 16, 609 (рум.)

См. также: 3702, 3706, 3809, 3871, 3888, 3889, 3968, 3980, 3998, 4012, 4021, 4031

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4197. Краткий обзор теории вероятностей. Ренъи (A valószínüségszámitás történetének rövid áttekintése. Rényi Alfréd), Magyar tud. mat. es fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 4, 447—466 (венг.)

В связи с 300-летием со дня рождения Якова Бернулли автор дает сжатый, но основательный обзор истории развития теории вероятностей, источники которой исходят ко временам Ренессанса. Автор ясно указывает на сильное влияние, оказанное на развитие теории вероятностей в течение последних 200 лет борьбой между идеализмом и материализмом. Особенно между серединой XIX и началом XX в. субъективно-идеалистическая точка зрения на понятие вероятности сильно препятствовала развитию теории вероятностей и ее применению. По мнению автора, понятие вероятности, аксиоматически введенное А. Н. Колмогоровым, дало решающий толчок развитию теории вероятностей. Это понятие основано «на правильном понимании диалектического противоречия между необходимостью и случайностью и на материалистическом понимании объективности вероятности».

После обзора новейшего развития автор кончает кратким обзором работ венгерских математиков в этой области.

По мнению референта, несмотря на очень ценные философские мысли в статье, автор мог бы рассматривать немного подробнее влияние тех общественных сил, которые содействовали развитию проблематики теории вероятностей. G. Alexits

4198. Случайное блуждание по полубесконечной прямой дискретными шагами. Шентон (A semi-infinite random walk with discrete steps. Shenton L. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 442—448 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание частицы по полубесконечной прямой с дискретным временем. Возможные положения частицы $x = 0, 1, 2 \ldots$, начальное положение $x = d$. Вероятности перехода за один шаг $p(x, y)$ не зависят от времени и соответственно равны: $p(x, x-1) = K'/2 \neq 0$; $p(x, x) = k$,

$$p(x, x+1) = K/2 \neq 0 \ (x > 0), \text{ где } K'/2 + K/2 + k = 1,$$

$$p(0, x) = p(x) \ \ (0 \leqslant x \leqslant m), \ \ p(0, x) = 0, \ \ x > m.$$

Если частица находится в точке $x = 0$, то существует вероятность ее поглощения $p_d = 1 - \sum_{s=0}^{m} p_s$. Отыскивается вероятность $p_n(x \mid d)$ попасть на n шагу в точку x. Выведена формула для $p_n(x, d)$ в виде контурного интеграла. Вычислено математическое ожидание времени блуждания до поглощения.

Из формулы для $p_n(x, d)$ выводятся ранее известные результаты: вероятность разорения при игре с бесконечно богатым противником, блуждания с отражающими и эластичными экранами (получаются применением соответствующих граничных условий). В. П. Швальб

4199. Усиленный закон больших чисел для обобщенных случайных величин. Ханш (The strong law of large numbers for generalized random variables. Hanš O.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1956, 4, № 1, 15—17 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 1, 15—17

Исследуется сходимость последовательности случайных величин, значения которых взяты из банаховых пространств. В частности, устанавливается, что усиленный закон больших чисел (в смысле сильной сходимости) имеет место почти везде для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин тогда и только тогда, когда они имеют математические ожидания, и если множество возможных значений компактно с вероятностью 1. Доказательства будут опубликованы в Чехосл. матем. ж. K. Urbanik

4200. Некоторые результаты из теории ограниченного размещения. Фрёйнд, Познер (Some results on restricted occupancy theory. Freund John E., Pozner Arthur N.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 537—540 (англ.)

Рассматривается следующая модель: r неразличимых предметов размещается по k неразличимым ячейкам, в каждую из которых может попасть не более чем m предметов. Допускаются и пустые ячейки. Исследуется распределение величин $v_i \ (i = 0, 1, \ldots, m)$, представляющих собой число ячеек, содержащих ровно i предметов. Величина $N(r, k, m)$, называемая коэффициентом ограниченного размещения, представляет собой число способов, которыми r предметов при сделанных ограничениях могут быть размещены по k ячейкам. Для этого коэффициента найдено точное выражение и рекуррентные формулы, связывающие $N(r, k, m)$, $N(r-1, k, m)$, $N(r, k-1, m)$ и $N(r-m-1, k-1, m)$.

Через коэффициенты ограниченного размещения выражаются моменты величин v_i и дисперсия $s^2 = \sum_{i=0}^{m} (i - r/k)^2 (v_i/k)$. Б. Н. Гартштейн

4201. О группировках при случайном размещении выпуклых фигур или тел в двух или трех измерениях. Мак (On clumps formed when convex laminae or bodies are placed at random in two or three dimensions. Mack C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 246—250 (англ.)

Результаты автора (РЖМат, 1955, 3881) о случайно размещенных фигурах в плоскости дополняются, исправляются (в приведенной в указанном реферате формуле для C вместо $=$ надо $\leqslant$) и переносятся на трехмерный случай. При этом b_{ur} заменяется через $F_{ur} = V_u + A_u P_r + A_r P_u + V_r$, где V_r, A_r, P_r — соответственно объем, площадь поверхности и «средний перпендикуляр» (среднее по всем направлениям расстояние от произвольной внутренней точки до плоскости опоры) выпуклого тела r-й группы. Г. К. Энгелис

4202. О предельных теоремах теории вероятностей. Дюге (Sur les théorèmes limites du calcul des probabilités. Dugué D.), Rev. Inst. internat. statist., 1955, 23, № 1—3, 29—35 (франц.; рез. англ.)

Теорема. Если характеристическая функция $\varphi_n(u)$ закона распределения L_n стремится к пределу $\varphi(u)$ и при этом $R\varphi(u)$ непрерывна в 0, то L_n стремится к предельному закону L, характеристическая функция которого равна $\varphi(u)$,

Устанавливаются различные факты, относящиеся к поведению вещественной части характеристической функции в окрестности 0 и поведению соответствующей функции распределения на бесконечности. В частности, доказывается теорема: Для того чтобы существовала производная в нуле от вещественной части характеристической функции, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей функция распределения $F(t)$ удовлетворяла соотношению

$$\lim_{t \to \infty} t\,[1 - F(t) + F(-t)] = 0.$$

А. А. Бобров

4203. Предельная теорема для улучшенной схемы Бернулли. Фиш (A limit theorem for a modified Bernoulli scheme. Fisz M.), Studia math., 1955, 15, № 1, 80—83 (англ.)

Обобщение результата автора (РЖМат, 1956, 3182). Пусть X — пространство всех действительных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$. Введя понятия неособенной функции распределения вероятностей P на X, сходимости последовательности функций вероятностей P_n и понятие о функции G нормально-пуассоновского типа, автор доказывает, что если выполнены условия:

$$P_n(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_{r_n} = k_{r_n}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_{r_n}!} p_{n1}^{k_1} p_{n2}^{k_2} \ldots p_{nr_n}^{k_{r_n}},$$

где r_n — неубывающая функция от n, и $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, то последовательность функций распределения вероятностей случайных векторов

$$(A_{n1}x_1 + B_{n1},\ A_{n2}x_2 + B_{n2}, \ldots, A_{nr_n}x_{nr_n} + B_{nr_n}),$$

где $A_{nm} \neq 0$ и B_{nm} $(n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots, r_n)$ — действительные числа, сходится при $n \to \infty$ к неособой функции распределения G и G — функция нормально-пуассоновского типа. Дается некоторая физическая интерпретация доказанной теоремы.

T. Czechowski

4204. Замечания к стохастическому процессу Пуассона (III). (Об одном свойстве однородного пуассоновского процесса). Рылл-Нардзевский (Remarks on the Poisson stochastic process (III). (On a property of the homogeneous Poisson process). Ryll-Nardzewski C.), Studia math., 1954, 14, № 2, 314—318 (англ.)

Автор трактует стохастический процесс как последовательность случайных величин $\{x_j\}$, принимающих действительные значения. Дополнительно он предполагает, что $P\{x_j \neq x_k\} = 1$ для $j \neq k$, $P\{\lim_j |x_j| = \infty\} = 1$ и что для каждого действительного числа c и для любого j $P\{x_j = c\} = 0$. Пусть $n(I)$ обозначает число индексов j, для которых x_j принадлежит интервалу I. Процесс $\{x_j\}$ называется однородным пуассоновским процессом, если для разделенных интервалов $I_1, \ldots, I_k$ случайные величины $n(I_1), n(I_2), \ldots, n(I_k)$ стохастически независимы и

$$P\{n(I) = k\} = \frac{(\lambda |I|)^k}{k!} e^{-\lambda |I|},$$

где $|I|$ — длина интервала I.

Пусть $\{x_j\}$ — однородный стохастический пуассоновский процесс и пусть $f(t)$ — интегрируемая комплексная функция действительного переменного. Доказывается, что произведение $p_f = \Pi_j (1 + f(x_j))$ сходится с вероятностью 1 и имеет математическое ожидание

$$E(p_f) = \exp \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Обратное утверждение также верно. Если формула (1) выполняется для любой интегрируемой комплексной функции, то $\{x_j\}$ является однородным пуассоновским процессом.

Случайные переменные $\{y_j\}$ эквиваленты в смысле Финетти, если распределение переменных $y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}$ (для разных индексов j_n) зависит только от k. Доказывается, что если $\{x_j\}$ — однородный пуассоновский процесс и если последовательность $\{y_j\}$, состоящая из эквивалентных случайных величин, не зависи от последовательности $\{x_j\}$, то последовательност $\bar{x}_j = x_j + y_j$ является однородным пуассоновски процессом.

K. Urbani

4205. Арифметические и предельные теоремы дл одного класса случайных величин. Хьюитт Цуккерман (Arithmetic and limit theorems fo a class of random variables. Hewitt Edwin Zuckerman Herbert), Duke Math. J., 1955 22, № 4, 595—615 (англ.)

Изучаются предельные теоремы для сумм незави симых случайных величин, принимающих значени из конечной коммутативной полугруппы. На полу группу G накладывается еще дополнительное огра ничение, что существует такое число $m > 1$, чт $x^{m+1} = x$ для всех $x \in G$. В этом случае полугруппа G распадается на сумму непересекающихся групп.

Полухарактером $\chi(x)$ называется комплексная функция, определенная на полугруппе G, не равная тождественно нулю и обладающая свойством $\chi(x)\chi(y) = \chi(xy)$ для всех $x, y \in G$. Используется аппарат характеристических функций и созданный авторами для данного случая гармонический анализ, основанный на свойствах полухарактеров.

Выясняется, что предельные для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями из полугруппы G законы распределения являются идемпотентными элементами в линейном пространстве всех функций на G (с определенной операцией свертки двух функций). Исследуются достаточные и необходимые условия того, что данный закон распределения является предельным для сумм независимых случайных величин. Таким образом, часть результатов Н. Н. Воробьева, установленных им для конечных абелевых групп (РЖМат, 1955, 1858), переносится на этот более общий случай, причем в некоторых случаях доказательства даже более просты. Другие же результаты Н. Н. Воробьева, по признанию авторов, не поддаются их методам.

Б. М. Клосс

4206. О вторичных стохастических процессах, порожденных рекуррентными процессами. Такач (On secondary stochastic processes generated by recurrent processes. Takács L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 17—29 (англ.; рез. русс.)

Рассматривается стохастический процесс

$$\eta(t) = \sum_{0 \leqslant t_n \leqslant t} f(t - t_n, \chi_n),$$

где t_n — случайные моменты времени, а χ_n — последовательность одинаково распределенных случайных величин, не зависимых между собой и не зависящих от t_n, с функцией распределения $H(x)$.

Предполагается, что последовательность t_n — процесс с положительными независимыми приращениями (рекуррентный процесс), причем $P\{t_n - t_{n-1} < x\} = G(x)$. Наряду с процессом $\eta(t)$ рассматривается также процесс

$$\eta^*(t) = \sum_{-\infty < t_n \leqslant t} f(t - t_n, \chi_n).$$

Получено интегральное уравнение для характеристической функции процесса $\eta(t)$, а также выражения для моментов $\eta(t)$. Даются также условия, при которых существуют пределы у моментов $\eta(t)$ при $t \to \infty$, и выражения для этих пределов.

Положим $\lambda_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t, x)]^j\, dH(x)$; $m(t)$ — математическое ожидание числа событий t_n, содержащихся в интервале $(0, t)$.

Доказывается, например,

Теорема 2. Для математического ожидания $M\eta(t) = M(t)$ имеем $M(t) = \int_0^t \lambda_1(t-x)\,dm(x)$.

Далее, если $G(t)$ — нерешетчатое распределение с конечным математическим ожиданием $\theta = \int_0^\infty t dG(t)$ и $\lim_{t\to\infty} t\lambda_1(t) = 0$, то $\lim_{t\to\infty} M(t) = \theta^{-1}\int_0^\infty \lambda_1(t)\,dt$ при условии, что интеграл в правой части существует.

Доказывается, что $\eta^*(t)$ существует с вероятностью 1, если $G(t)$ — нерешетчатая функция распределения с конечным математическим ожиданием и $\int_0^\infty \int_0^\infty f(t,x)\,dH(x)\,dt < \infty$.

Моменты для $\eta^*(t)$ получаются как пределы моментов $\eta(t)$ при $t\to\infty$. Полученные здесь формулы обобщают известные из физической литературы результаты Кемпбелла. Получено следующее выражение для корреляционной функции $R(\tau)$ процесса $\eta^*(t)$:

$$R(\tau) = \frac{1}{\theta D^2}\int_0^\infty \int_0^\infty f(t,x)\,f(t-\tau,x)\,dH(x)\,dt + \\ + \frac{1}{\theta D^2}\int_0^\infty [\lambda_1(t)\,M(t-\tau) + \lambda_1(t-\tau)\,M(t)]\,dt - \frac{M^2}{D^2},$$

где M — математическое ожидание и D^2 — дисперсия процесса $\eta^*(t)$.

Разобран важный для физических приложений пример, когда

$$f(u,x) = \begin{cases} x\exp(-au) & \text{при } u \geqslant 0,\ x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } u < 0 \text{ или } x < 0. \end{cases}$$

Р. З. Хасьминский

4207. О парах взаимно независимых событий в континуальных и дискретных полях вероятностей. Зушовк (Über Paare voneinander unabhängiger Ereignisse in kontinuierlichen und diskreten Wahrscheinlichkeitsfeldern. Suschowk Dietrich), Arch. Math., 1956, 7, № 3, 221—224 (нем.)

Пусть множество элементарных событий совпадает с R^1, $\mathfrak{R}(R^1, P)$ — соответствующее ему поле вероятностей и f — функция распределения поля. Поле $\mathfrak{R}(R^1, P)$ называется континуальным, если в разложении $f = \varphi + \psi$, где $\varphi\ (\geqslant 0)$ монотонна и непрерывна, $\psi\ (\geqslant 0)$ — монотонная функция скачков, функция $\varphi \not\equiv 0$. В противном случае поле $\mathfrak{R}(R^1, P)$ называется дискретным.

События A и B из поля $\mathfrak{R}$ называются тривиально независимыми, если равенство $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ осуществляется благодаря обращению в нуль или единицу одного из множителей правой части; в противном случае события A и B, удовлетворяющие этому равенству, называются нетривиально независимыми.

Теорема. Если поле вероятностей $\mathfrak{R}(R^1, P)$ континуально, то в нем всегда найдется несчетное множество различных пар (X, Y) состоящих из нетривиально независимых событий. Напротив, существуют дискретные поля вероятностей (как конечные, так и бесконечные), в которых имеется лишь тривиальная независимость.

А. А. Бобров

4208. Цепи Маркова в аналитической арифметике кватернионов и матриц. Линник Ю. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 63—68

Автором (РЖМат, 1957, 1118) было указано применение теории цепей Маркова для решения некоторых задач аналитической арифметики кватернионов. Задача сводилась к оценке предельного интегрального закона для распределения числа пребываний системы в данном состоянии при больших уклонениях от среднего значения этого числа. По способу Колмогорова—Дёблина, осуществлялось сведение на схему независимых случайных величин, и, наконец, применялась обобщенная и усиленная В. В. Петровым (РЖМат, 1954, 3015; 1956, 3190) теорема Крамера о вероятностях больших уклонений суммы независимых случайных величин.

В реферируемой работе показывается, что в случае, когда не требуется получение асимптотики, вместо теоремы В. В. Петрова достаточно использовать более просто доказываемое уточнение неравенства Чебышева, данное С. Н. Бернштейном (Теория вероятностей, ГТТИ, М.—Л., 1946, 165).

Схема рассуждений применима как в арифметике кватернионов, так и в арифметике матриц второго порядка.

И. П. Кубилюс

4209. Методы теории случайных процессов в квантовой физике. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 33—34

Краткие тезисы доклада, посвященного применениям в квантовой физике интегрирования в функциональных пространствах, сделанного на совещании по теории вероятностей в Ленинграде в 1955 г. Подробное изложение имеется в статье тех же авторов (РЖМат, 1957, 2512).

Р. З. Хасьминский

4210. Две нерешенные проблемы статистической механики. Мейер (Two unsolved problems of statistical mechanics. Mayer Joseph E.), Communs Pure and Appl. Math. 1955, 8, № 1, 73—83 (англ.)

Ставятся и обсуждаются две фундаментальные до сих пор не решенные проблемы статистической механики. Первая состоит в построении теории статистического равновесия классических или квантовых систем. Задача сводится к определению бесконечной цепочки функций распределения F_k, с помощью которых выражаются вероятности положения комплексов молекул в элементе объема конфигурационного пространства. Автор показывает возможность написания компактного матричного уравнения для матрицы Q, элементы которой построены из функций F_k. Решение этого уравнения представляет огромные трудности. Следует отметить, что в первой главе монографии Н. Н. Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике» (ОГИЗ, 1946) эта проблема получила уже частичное разрешение. Автор, по-видимому, не знаком с этой монографией.

Вторая проблема посвящена вопросам теории неравновесных систем. В частности, обсуждается вопрос о введении понятия энтропии для неизолированных систем.

О. С. Парасюк

4211. Обобщение теоремы Гливенко—Кантелли. Вольфовиц (Generalization of the theorem of Glivenko—Cantelli. Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 131—138 (англ.)

Доказывается следующее обобщение теоремы Гливенко—Кантелли (см., например, Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, М.—Л., 1950, стр. 282). Пусть $X_1^1, \ldots, X_1^k$; $X_2^1, \ldots, X_2^k$; $X_n^1, \ldots, X_n^k$ — последовательность взаимно независимых случайных величин таких, что $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$ имеют одинаковую функцию распределения; $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ — действительный вектор, $F(x\,|\,q)$ — функция распределения суммы $\sum_{i=1}^k q_i X_j^i$, а $F_n^*(x\,|\,q)$ — эмпирическая функция распределения сумм $\sum_{i=1}^k q_i X_j^i$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда вероятность

$$P\{\lim_{n\to\infty}\sup_q\sup_x|F(x|q)-F_n^*(x|q)|=0\}=1,$$

Указывается на возможность дальнейшего обобщения теоремы на случай, когда X_j^i при i фиксированном и $j=1,2,\ldots$ образуют метрически транзитивную стационарную последовательность. В. П. Швальб

4212. О сходимости эмпирических функций распределения. Блум (On the convergence of empiric distribution functions. Blum J. R.), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 3, 527—529 (англ.)

Работа посвящена обобщению теоремы Гливенко—Кантелли на некоторый класс борелевских множеств k-мерного евклидова пространства, который строится следующим образом.

Пусть Q_1 — класс множеств таких, что если вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A$, $y=(y_1,y_2,\ldots y_k)$, $y_i<x_i$, $i=1,2,\ldots,k$, то $y\in A$; Q_j, $j=2,\ldots,2^k-(2^k-1)$ классов множеств, получаемых последовательной заменой предыдущих неравенств на противоположные по одному за раз и $Q=\bigcup_{j=1}^{2k}Q_j$. На Q определена вероятностная мера μ. $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, — последовательность k-мерных независимых случайных векторов, распределенных согласно μ. Для каждого $n=1,2,\ldots$, μ_n — эмпирическая функция распределения, т. е. для каждого борелевского множества $A\in E_k$, $\mu_n(A)$ равно числу наблюдений из X_1, $X_2,\ldots,X_n$, принадлежащих A.

Доказана теорема: Если μ абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега, то

$$P\{\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in Q}|\mu_n(A)-\mu(A)|=0\}=1.$$

В. П. Швальб

4213. Совместное распределение линейных и квадратичных форм нормально распределенных переменных. Камалов М. К., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 21—24

Рассматривается совместное распределение форм

$$L=\sum_{h=1}^n a_hx_h \text{ и } Q=\sum_{h=1}^n b_hx_h^2$$

нормально распределенных центрированных независимых случайных переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n$. Доказывается, что плотность этого распределения имеет вид

$$f(Q,L)=C_n\exp\left(-\frac{L^2}{2d}\right)\left(Q-\frac{L^2}{d}\right)^{\frac{n-3}{2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(Q-\frac{L^2}{d}\right)\right],$$

где d, Q — константа.

Формы L и Q не являются независимыми случайными переменными, в то время как формы L и $\chi^2=Q-L^2/d$ суть независимые случайные переменные.

А. М. Бендерский

4214. О проекциях двумерных дискретных распределений. Пенков (Върху проекциите на двумерни дискретни разпределения. Пенков Б.), Изв. Матем. ин-т. Българ. АН, 1956, **2**, № 1, 87—90 (болг.; рез. русс., нем.)

Дается элементарное доказательство теоремы Крамера—Вольда для случая дискретного распределения. Резюме автора

4215. Решение одной проблемы о совпадении и ее обобщения. Абита (A proposito di un problema della concordanze e di una sua generalizzazione. Abita Emanuele), Archimede, 1956, **8**, № 1, 38—40 (итал.)

Дается вывод решения следующей проблемы: имеется колода из mn карт, в которой каждая из m групп содержит n карт одного цвета, занумерованных числами от 1 до n. После перетасовывания из колоды вынимаются по очереди (но наугад) все карты, причем очередь нумеруется следующим образом: $1,2,\ldots,n$, $1,2,\ldots,n$ и т. д. Спрашивается, с какой вероятностью P_{mn} хотя бы один номер карты, независимо от цвета, совпадает с номером очереди. Ответ:

$$1-P_{mn}=\frac{(m!)^{2n}}{(mn)!}\sum\frac{1}{\prod a_{ij}!},$$

где сумма распространяется на все решения системы

$$\begin{array}{lll} a_{11}+\cdots+a_{1n}=m & a_{11}+\cdots+a_{n1}=m & a_{11}=0\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ a_{n1}+\cdots+a_{nn}=m & a_{1n}+\cdots+a_{nn}=m & a_{nn}=0. \end{array}$$

В частности, а) $P_{m1}=1$, б) $1-P_{m2}=1/\binom{2m}{m}$, в) $1-P_{m3}=\frac{(m!)^3}{(3m)!}\left[\binom{m}{0}^3+\cdots+\binom{m}{m}^3\right]$.

Г. П. Боев

4216. Законы вероятностей Альфина. Морла (Les lois de probabilités de Halphen. Morlat G.), Rev. statist. appliquée, 1956, **4**, № 3, 21—44. Discuss., 45—46 (франц.)

4217. Основы кинетической теории, уравнение Больцмана. Марке (Base de la théorie cinétique, équation de Boltzmann. Marquet Simone), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 17, 1193—1196 (франц.)

4218. Возможное представление теории вероятностей в релятивистском пространстве-времени (случай одной случайной точки). Лерюст (Représentation possible de la théorie des probabilités dans l'espace-temps relativiste (cas d'un seul point aléatoire). Leruste Philippe), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 15, 1021—1022 (франц.)

4219 К. Элементы теории вероятностей. Бужинский (Elementy rachunku prawdopodobieństwa. Burzyński Jan. Kraków, Państw. Wydawn. Nauk, 1955, 137 s., 1 nlb., il., 5.90 zł. Tekst maszynopis powiel), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 31, 474 (польск.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4220. Общая теория различения в том случае, когда информация относительно распределения альтернативных популяций основывается на выборках. Рао (A general theory of discrimination when the information about alternative population distributions is based on samples. Rao C. Radhakrishna), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 651—670 (англ.)

Задача различения генеральных совокупностей по данным выборок ставится в следующем виде. Пусть произведены k независимых выборок S_i $(i=1,\ldots,k)$, давшие значения случайного признака X $\{x_j^{(i)}, j=1,\ldots, n_i,\ i=1,\ldots,k\}$ из k генеральных совокупностей с плотностями распределения $p_i(x,\theta_i)$ (x и θ могут быть векторами). Пусть, кроме того, произведено индивидуальное измерение X, давшее значение x. Предполагается a priori, что x относится к одной из k совокупностей. На основании данных выборок S_i и наблюденного значения x требуется решить вопрос о принадлежности x к некоторой из совокупностей. В статье дается краткий обзор исследований этой проблемы прежде всего для случая, когда параметры θ_i полностью известны. В наиболее общей форме этот случай задачи был разрешен А. А. Ляпуновым (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 1, 178—186),

исходя из принципа минимизации вероятностей ошибок классификации, но работа Ляпунова, по-видимому осталась неизвестной автору. Случай больших выборок и неизвестных параметров может быть приведен к предшествующему типу путем надлежащей оценки параметров.

Автор исследует случаи малых выборок и устанавливает ряд требований для рационального разбиения пространства выборок на k областей R_i таких, что попадание x в R_i влечет за собой отнесение x к i-й совокупности. Для этого исследуется, каково должно быть поведение функции вероятностей ошибок при близких друг к другу значениях параметров, чтобы разбиение гарантировало минимум ошибок классификации. В случае существования достаточных оценок параметров установленные требования приводят к определенному правилу разбиения, обеспечивающему наиболее мощную процедуру различения при малых различиях в параметрах.

Полученные результаты применяются к проблеме различения многомерных нормальных совокупностей с известными и неизвестными матрицами дисперсий.

Н. В. Смирнов

4221. Некоторые распределения и моментные формулы для цепей Маркова. У и т л (Some distribution and moment formulae for the Markov chain. W h i t t l e P.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 2, 235—242 (англ.)

Рассматривается однородная по времени цепь Маркова с конечным числом состояний и с матрицей переходных вероятностей

$$P = \|p_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, a),$$

где p_{ik} — вероятность перехода из состояния с номером i в состояние с номером k.

Производится $N+1$ наблюдение над переходами из одних состояний в другие в рассматриваемой цепи. Вводятся эмпирические величины: n_{ik} — число шагов, в которых наблюдались переходы из состояния с номером i в состояние с номером k;

$$n_{\cdot k} = \sum_{i=1}^{a} n_{ik}, \quad n_{i\cdot} = \sum_{k=1}^{a} n_{ik}, \quad \tilde{p}_{ik} = n_{ik}/n_{i\cdot},$$

$\tilde{p}_{ik}$ — эмпирическая вероятность перехода.

Очевидно, $N = \sum_{k=1}^{a} n_{\cdot k} = \sum_{i=1}^{a} n_{i\cdot}$.

Статья посвящается изучению выборочных распределений, связанных с величинами n_{ik} и $\tilde{p}_{ik}$, рассматриваемыми, разумеется, как случайные. Даются, например, распределение вероятностей для величин n_{ik} и оценка первых двух моментов для $\tilde{p}_{ik}$.

Примечание референта. Автору, по-видимому, была неизвестна работа В. И. Романовского (Статистические задачи, связанные с цепями Маркова, Ташкент, Изд. Узб. филиала АН СССР, 1940), в которой обсуждены некоторые из вопросов, затронутых в реферируемой статье.

Т. А. Сарымсаков

4222. Статистики со свободным распределением. Бернбаум, Рубин (On distribution-free statistics. B i r n b a u m Z. W., R u b i n H.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 593—598 (англ.)

Рассматриваются статистики, определенные в n-мерном пространстве $R_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ выборок одномерной случайной величины X, имеющей функцию распределения F. Вводятся следующие определения.

Действительная величина $W = S(X_1, \ldots, X_n, G)$ называется статистикой из Ω по отношению к Ω' (где Ω, Ω' — два семейства функций распределения), если: 1) как только $G \in \Omega$, то $F \in \Omega'$, 2) $S(X_1, \ldots, X_n, G)$ определена почти всюду в R_n, 3) $W = S(X_1, \ldots, X_n, G)$ — одномерная случайная величина с функцией распределения $\rho(W, F) = \rho[S(X_1, \ldots, X_n, G); F]$.

Статистика $S(X_1, \ldots, X_n, G)$ из Ω по отношению к Ω' называется статистикой структуры (d), если существует функция Φ, определенная на n-мерном единичном кубе, симметрическая по своим аргументам и такая, что для каждого $G \in \Omega$, $F \in \Omega'$ равенство $S(X_1, \ldots, X_n, G) = \Phi[G(X_1), \ldots, G(X_n)]$ выполняется почти всюду в R_n.

Статистика $S(X_1, \ldots, X_n, G)$ называется статистикой со свободным распределением в Ω, если $\Omega = \Omega'$ и функция распределения $\rho(W, G) = \rho[S(X_1, \ldots, X_n); G]$ не зависит от $G \in \Omega$. Показано, что если статистика из $\Omega = \Omega' = \Omega_2$ имеет структуру (d), то она является статистикой со свободным распределением.

Далее в качестве Ω берется Ω^* — семейство непрерывных функций распределения таких, что если $G \in \Omega^*$, то G строго возрастает для всех x, для которых $0 < G(x) < 1$.

Статистика $S(X_1, \ldots, X_n, G)$ из Ω^* по отношению к некоторой Ω' называется статистикой с сильно свободным распределением из Ω^* по отношению к Ω', если функция распределения $\rho[S(X_1, \ldots, X_n, G); F]$ зависит только от функции $\tau = FG^{(-1)}$ ($G^{(-1)}$ — обратная функция для G) для всех $G \in \Omega^*$ $F \in \Omega'$.

Доказана теорема: Если статистика $W = S(X_1, \ldots, X_n, G)$ из Ω^* по отношению к Ω^* симметрична по $X_1, \ldots, X_n$ и имеет сильно свободное распределение, то она имеет структуру (d).

В качестве примера статистики структуры (d) приведена статистика Колмогорова $D_n = \sup[F_n(x) - G(x)]$ (где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения), которую можно записать в виде

$$D_n = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \max \left[G(X_i') - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - G(X_i') \right] \right\},$$

где $X_1', \ldots, X_n'$ есть $X_1, \ldots, X_n$, расположенные в порядке возрастания.

В. П. Швальб

4223. Оценка и значение логарифма отношения вероятностей. Холдейн (The estimation and significance of the logarithm of a ratio of frequencies. H a l d a n e J. B. S.), Ann. Human Genetics, 1956, 20, № 4, 309—311 (англ.)

В работе Вульфа (РЖБиол., 1957, 42621) рассматривается следующая схема.

Пусть из n лиц, рассматриваемых в специальных условиях, например больных, h имеет признак α и k — признак β, а в группе N любых лиц H имеет признак α и K — признак β. Пусть p и q — соответственно вероятности признаков α и β в первой группе, а P и Q — их вероятности во второй группе. Тогда $\ln(hK/kH)$ дает эффективную оценку $\ln(pQ/qP)$. Но эта оценка имеет смещение, которым нельзя пренебречь.

Автор предлагает оценку, имеющую меньшее смещение, чем оценка Вульфа. Так как наблюдения над двумя группами независимы, то ошибки некоррелированы. Поэтому рассматривается отдельно оценка $\ln(p/q)$. Пусть $h = pn + \alpha$, $k = qn - \alpha$, а t — постоянная; $\ln[(h+t)/(k+t)] = \ln(p/q) + x$, где x — ошибка оценки; $x = \ln[1 + (t+\alpha)/np] - \ln[1 - (t-\alpha)/nq]$ разлагается в ряд по степеням α. С помощью этого ряда находится $E(x)$.

Оказывается, что оценка $\ln(h/k)$ имеет смещение $(p-q)/2npq$. При $t = 1/2$ получается оценка $\ln[(2h+1)/(2k+1)]$ со смещением $(p-q)/24n^2p^2q^2$.

Соответственно в случае Вульфа оценка $\ln[(2h+1)\times(2K+1)/(2k+1)(2H+1)]$ имеет меньшее смещение, чем оценка $\ln(hK/kH)$.

Б. Н. Гартштейн

4224. О принципе разложения функций распределения и его применение к распределению Стьюдента.

Эльвинг (An expension principle for distribution functions with application to Student's statistic. Elfving G.), Suomalais. tiedeakat. toïmituks., 1955, sar. AI, № 204, 1—8 (англ.)

Пусть X и Y_n — независимые случайные величины такие, что X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, а Y_n стохастически стремится к нулю при $n\to\infty$. Случайные величины $t=X+Y_n$ и $t=X(1+Y_n)$ и $t=X/(1+Y_n)$ будут иметь функции распределения $F_n(t)$, стремящиеся к некоторой предельной функции распределения $F(x)$. Возникает вопрос, каким образом учесть изменения в $F(x)$, вызываемые случайной величиной Y_n. В ряде случаев для $F_n(t)$ можно получить разложение вида

$$F_n(t)\sim\int F_0(t,\ y)\,dG_n(y)+\int F_1(t,\ y)\,dG_n(y)+\ldots,$$

где $G_n(y)$ — функция распределения Y_n, а $F_k(t,\ y)$ — некоторые функции.

В работе рассматривается статистика Стьюдента $t=X/S$, где X распределено нормально (0,1), а S стохастически стремится к единице и имеет плотность

$$g_n(s)=2\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)s^{n-1}e^{-ns^2/2}.$$

Выводится разложение для плотности распределения t $S_n(t)$. Полученный ряд сходится при $|t|<\sqrt{n}$. Для $n\geqslant 10$ дается приближенная вычислительная формула. В. П. Скитович

4225. Распределение медианы выборки. Чжу (On the distribution of the sample median. Chu John T.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 112—116 (англ.)

Рассматривается выборка объема $2n+1$ из генеральной совокупности с непрерывной плотностью. Исследуется распределение нормированного значения медианы выборки и отыскиваются нижняя и верхняя границы значений ее функции распределения (для конечного n).

Нормальное прямоугольное распределение и распределение Лапласа исследованы более подробно. В частности, для функции распределения $H(x)$ нормированного значения медианы нормальной совокупности получено выражение (для достаточно больших n)

$$0{,}9929\,(1+n/8)\sqrt{1-1/(2n+2)}\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\leqslant$$

$$\leqslant H(y)-H(-x)\leqslant(1+n/8)\sqrt{1+1/2n}\,[\Phi(y)-\Phi(-x)],$$

где $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$.

Работа дополняет результаты Крамера (Математические методы статистики, Изд-во ин. лит., М., стр. 404). В. П. Швальб

4226. Замечание о доверительных множествах для случайных величин. Вэйсс (A note on confidence sets for random variables. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 142—144 (англ.)

Рассматриваются независимые случайные величины X и Y, имеющие каждая пуассоновское распределение. Их математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ неизвестны, но известно отношение $M(Y)/M(X)=r$.

Строятся доверительные интервалы уровня α для Y (при достаточно больших значениях X). Приводятся формулы: для левого конца интервала

$$L_1(X)=\frac{1}{2}\left\{2rX+rk^2-k\sqrt{k^2r^2+4rX(1+r)}\right\},$$

для правого

$$L_2(X)=\frac{1}{2}\left\{2rX+rk^2+k\sqrt{k^2r^2+4rX(1+r)}\right\},$$

где k определяется по α.

Рассмотрено применение полученных формул. В. П. Швальб

4227. Критерии для проверки гипотез о модели линейной авторегрессии. II. Нулевые распределения для схем высокого порядка; ненулевые распределения. Дженкинс (Tests of hypotheses in the linear autoregressive model. II. Null distributions for higher order schemes: non-null distributions. Jenkins G.M.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 186—199 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 6739. Изучается вопрос о конструкции критериев для проверки гипотез о значениях коэффициентов α_i в соотношениях

$$x_i=\alpha_1x_{i-1}+\ldots+\alpha_kx_{i-k}+z_i;\quad x_{n+i}=x_i,$$

которым удовлетворяет случайная последовательность x_i (модель линейной авторегрессии). Здесь z_i — независимые нормальные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2. Критерии предлагается конструировать из эмпирических сводных коэффициентов корреляции между x_i и x_{i-k}, т. е. из величин $v_k=R_k^{1,\,k+1}/R_{k-1}$, где R_k — детерминант корреляционной матрицы $k+1$-го порядка, $R_k^{1,\,k+1}$ — алгебраическое дополнение первого элемента $k+1$-й строки в R_k. Распределение для v_2 было изучено автором (РЖМат, 1956, 6739).

Вычисляются моменты нулевых распределений для v_1, v_2, v_3, v_4 (т. е. распределений при нулевых гипотезах о соответствующих коэффициентах α_i) при учете отличия от нуля среднего значения $\bar{x}$. Определяется совместная характеристическая функция статистик $c_j=\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+j}/2\sigma^2$ и сглаженная характеристическая функция

$$\varphi_s=\exp\left[-(n/2)\lim_{n\to\infty}((-2/n)\ln\varphi)\right].$$

С помощью этих характеристических функций удается выразить ненулевые распределения для $r_1,\ldots,r$ через соответствующие нулевые распределения. В частности, детально рассматриваются ненулевые распределения для марковской схемы. А. С. Монин

4228. Проверка квантовой гипотезы, основанная на одном множестве данных. Бродбент (Examination of a quantum hypothesis based on a single set of data. Broadbent S. R.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 32—44 (англ.)

Пусть $y_1,\ldots,y_n$ — результаты измерений (положительные числа), расположенные в порядке возрастания величины. В ряде случаев представляет интерес проверить, удовлетворяют ли эти данные соотношению $y_i=\beta+2r_i\delta+\varepsilon_i$ (квантовая гипотеза), где r_i — неотрицательные целые числа, 2δ — некоторый квант, а ε_i — малые ошибки измерений. Противоположное предположение (y_i не группируются около арифметической прогрессии, а распределены по некоторому унимодальному или прямоугольному закону) называется прямоугольной гипотезой.

Критерием согласия с квантовой гипотезой служит величина

$$s^2/d^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-2r_id)^2/nd^2,$$

где $2d$ — предположительная величина кванта, а r_i — неотрицательные целые числа, минимизирующие выражения $|y_i - 2r_i d|$. Для подбора значения d рекомендуется следующая процедура: вычисляются числа $d_{im} = y_i/(m+1)$; $i = \overline{1, n}$, $m = 0, 1, \ldots$, которые затем располагаются в порядке убывания (значения $d_{im} < d^*$, где d^* — заданное число, определяемое точностью измерений, отбрасываются). В каждом интервале упорядоченного ряда значений d_{im} вычисляется величина $2d = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 / \sum_{i=1}^{n} r_i y_i$, минимизирующая s^2/d^2, и соответствующий минимум выражения s^2/d^2. Наименьший из полученных минимумов s^2/d^2 соответствует наиболее вероятному значению кванта.

Обсуждается вопрос о выборе между квантовой и прямоугольной гипотезами. При справедливости прямоугольной гипотезы величина $(1/3 - s^2/d^2)\sqrt{n}$ приблизительно нормальна $(0, \sqrt{4/45})$, и грубый критерий для выбора квантовой гипотезы имеет вид $(1/3 - s^2/d^2)\sqrt{n} > 1$. Приводится пример.

А. С. Монин

4229. Скользящие критерии для последовательности гамма-величин. Дорнбос, Принс (Slippage tests for a set of gamma-variates. Doornbos R., Prins H. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 3, 329—337; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 329—337 (англ.)

Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — независимо распределенные случайные величины с плотностями распределения

$$f(u_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\beta_i^{\alpha_i}} u_i^{\alpha_i - 1} e^{-u_i/\beta_i}, \quad 0 \leqslant u_i \leqslant \infty,$$

где α_i и β_i — положительные действительные числа. Строятся критерии для проверки гипотезы $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = \beta$ против конкурирующей гипотезы $H_1: \beta_1 = \cdots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \ldots = \beta_k = \beta$, $\beta_i = c_i\beta$ $(c_i > 1)$ для одного неизвестного значения i и против конкурирующей гипотезы $H_2: \beta_1 = \cdots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \cdots = \beta_k = \beta$, $\beta_i = c_i\beta$ $(0 < c_i < 1)$ для одного неизвестного значения i.

Для критерия H_0 против H_1 определяются величины

$$d_j = \frac{1}{B(\alpha_j, A - \alpha_j)} \int_{x_j}^{1} t^{\alpha_j - 1} (1-t)^{A - \alpha_j - 1}\, dt,$$

где $A = \sum \alpha_i$, $x_j = u_j / \sum u_i$. H_0 отвергается, когда $d = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} d_j$ принимает значение $\leqslant \varepsilon/k$.

При построении критерия для H_0 против H_2 используются величины $e_j = 1 - d_j$. H_0 отвергается, если

$$e = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} e_j \leqslant \varepsilon/k.$$

В обоих случаях уровень значимости критериев лежит в границах между ε и $\varepsilon - \varepsilon^2/2$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ критерии являются в некотором смысле оптимальными.

В предположении, что верна H_1 и параметр β_i скользит вправо, $\beta_i = c_i\beta$ $(c_i > 1)$, находятся верхняя и нижняя границы вероятности Q_i принять правильное решение. Если правильна H_2 и β_i скользит влево, то имеют место аналогичные оценки для вероятности P_i сделать правильный выбор в этом случае.

Б. Н. Гартштейн

4230. О многочленах, применяемых в регрессиях различного порядка в статистике. Жанн-д'Оте (Sur les polynômes employés dans les regressions de divers degrés en statistique. Janne d'Othée Henry), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 5, 251—259 (франц.)

Выводятся формулы для вычисления коэффициентов корреляционного уравнения

$$y = \sum_{p=0}^{n} A_p P_p,$$

где P_p — многочлены вида $P_p = \sum_{i=0}^{p} a_{p,i} x^i$.

В предположении ортогональности этих многочленов, находится

$$P_p = P_{p-1}P_1 - K(n, p-1)\, P_{p-2},$$

где $K(n, p) = p^2(n^2 - p^2)/4(4p^2 - 1)$ и $P_0 = 1$, $P_1 = -(n-1)/2 + x$.

Прилагается таблица значений коэффициентов $a_{p,i}$ и $A_{p,i}$.

Примечание референта. Приведенные формулы известны. См., например, Митропольский А.К. Статистическое исчисление, 4, Л., 1954, стр. 107, формулы (3.3)—(3.5). А. К. Митропольский

4231. Интерполяция и аппроксимация некоторых числовых характеристик размаха в выборке из нормальной совокупности. Тьюки (Interpolations and approximations related to the normal range. Tukey John W.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 480—485 (англ.)

Пусть n — объем выборки из нормальной совокупности. Показано, что при соответствующем подборе величин a, b и c выражение $a \log_{10}[b(n+c)]$ можно с успехом использовать для приближения и интерполяции следующих функций от n: 1) 5 и 1% точек нормального размаха, 2) среднего нормального размаха, 3) дисперсии нормального размаха, 4) коэффициента вариации и 5) 5 и 1% точек отношения нормального размаха к оценке его стандартного отклонения. Приложены таблицы, показывающие, что относительная ошибка такого рода приближений для $6 \leqslant n \leqslant 1000$, как правило, меньше 1%. Л. Н. Большев

4232. Анализ экспериментов для испытания чувствительности, когда величины стимулов содержат неизвестные случайные ошибки. Голуб, Грабс (Analysis of sensitivity experiments when the levels of stimulus cannot be controlled. Golub Abraham, Grubbs Frank E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, 51, № 274, 257—265 (англ.)

Исследуется бронебойное действие снаряда в зависимости от его скорости l, причем предполагается, что данная броневая плита пробивается снарядом со скоростью $l > \mu$. Если же $l \leqslant \mu$, то плита остается неповрежденной. Для оценки μ проводят n независимых испытаний, в каждом из которых наблюдаются две величины: δ_i и l_i (l_i — скорость снаряда в i-м испытании, $\delta_i = 1$, если i-й снаряд пробил плиту, и $\delta_i = 0$ — в противном случае). Строится функция правдоподобия

$$P = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\delta_i} (1 - p_i)^{1 - \delta_i},$$

где $p_i = f(l_i)$ — вероятность того, что i-й снаряд пробьет броневую плиту ($f(l)$ — несобственная функция распределения со скачком в точке $l = \mu$). В реальных наблюдениях значения l_i обычно содержат случайные нормальные ошибки, поэтому авторы считают возможным положить

$$p_i = 1/2 + \Phi[(l_i - \mu)/\sigma],$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, и далее оценивать неизвестные параметры μ и σ методом наибольшего правдоподобия. Л. Н. Большев

4233.· Сравнение средних рядов наблюдений из отрезков независимых стохастических рядов. Джоуэтт (The comparison of means of sets of observations from sections of independent stochastic series. Jowett G. H.). J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 2, 208—227 (англ.)

Рассматривается вопрос об определении выборочной дисперсии среднего по отрезкам стационарных временных рядов.

В основу работы положены два, легко доказываемые равенства:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{s=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \rho_s, \qquad (1)$$

где ρ_s — коэффициент корреляции между членами x_k и x_{k+s} ряда, а σ^2 — дисперсия каждого члена; это равенство для дисперсии среднего арифметического $\bar{x}$, $\sigma^2_{\bar{x}}$, автор называет формулой Бейли и Хаммерсли (1946 г.), хотя она была впервые получена Е. Е. Слуцким (Тр. Конъюнктурного ин-та, 1929, 2, 665):

$$\delta_s = E\,\frac{1}{2}\,(x_t - x_{t+s})^2 = \sigma^2\,(1 - \rho_s). \qquad (2)$$

Из (2) вытекает, что при рассмотрении стационарных временных серий, когда связи между x_t и x_{t+s} ослабевают с увеличением s, абсолютная величина разности $|\delta_s - \sigma^2|$ может быть сделана как угодно малой.

Последнее является основной идеей реферируемой статьи.

Показывается, как практически применяется анализ половины квадратов разностей для определения пределов изменения дисперсии средней, для чего в работе приводятся примеры из области текстильной промышленности (обработка данных опыта по определению влаги при сушке синтетической текстильной пряжи) и из области ботаники. А. Г. Корман

4234. Двумерный критерий «плюс—минус». Ходжес (A bivariate sign test. Hodges J. L., Jr), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 523—527 (англ.)

Рассматриваются две двумерные генеральные совокупности. Из каждой производится случайная выборка объема n: (x_i, y_i) и (x'_i, y'_i) соответственно $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Предлагается критерий для проверки нулевой гипотезы, состоящей в том, что функции распределения, характеризующие обе совокупности, одинаковы и что совокупности независимы. Альтернатива нулевой гипотезы такова: совокупности независимы, но между векторами первой и второй совокупности имеется сдвиг.

Критерий состоит в следующем: векторы $(x'_i - x_i, y'_i - y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, проектируются на прямые пучка, состоящего из прямых с одинаковым углом между соседними прямыми; затем подсчитывается для каждой прямой число положительных проекций S. Пусть M — наибольшее из значений S. Нулевая гипотеза принимается или отбрасывается в случае соответствия или несоответствия полученных значений M с вычисленными по распределению для M. Это распределение найдено путем идентификации данной задачи с классической задачей о разорении игрока (Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 313, задача 6, при $p = q = 1/2$). В. П. Швальб

4235. Некоторые минимаксные инвариантные методы для оценки функции распределения Аггарвал (Some minimax invariant procedures for estimating a cumulative distribution function. Aggarwal O m P.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 450—463 (англ.)

Рассматривается выборка объема n из одномерной генеральной совокупности, характеризуемой неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$. Отыскивается оценка для $F(x)$ в форме ступенчатой функции $\hat{F}(x)$, где $\hat{F}(x) = c_j$ для $x_j \leqslant x < x_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, x_j для $j = 1, 2, \ldots, n$ — выборочные значения, расположенные в порядке возрастания.

Мерой расхождения $F(x)$ и $\hat{F}(x)$ служат интегралы вида

$$L(F, \hat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \hat{F}(x)|^r\, dF(x)$$

или

$$L_1(F, \hat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x) - \hat{F}(x)|^r}{F(x)\,[1 - F(x)]}\, dF(x),$$

где r — в обоих случаях целое положительное число.

Наилучшей считается оценка со значениями c_j, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, минимизирующими математическое ожидание $L(F, \hat{F})$ (соответственно $L_1(F, \hat{F})$). Эффективное вычисление c_j, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, получается в обоих случаях только при $r = 1$ и $r = 2$. Оказывается, что при $r = 1$ значения c_j совпадают со значениями медиан соответствующих бэта-распределений $I(p, q)$, а при $r = 2$ со значениями средних тех же распределений (Крамер Г., Математические методы статистики, М., Изд-во ин. лит., 1948, стр. 269), где $p = j + 1$, $q = n - j + 1$ при пользовании $L(F, \hat{F})$; $p = j$, $q = n - j$ при пользовании $L_1(F, \hat{F})$. В. П. Швальб

4236. Статистическое исследование центроидного метода. Лоли (A statistical examination of the centroid method. Lawley D. N.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1954—1955, A64, № 2, 175—189 (англ.)

Исследуется один метод оценки, используемый в факторном анализе. Пусть случайные величины $x_1, \ldots, x_p$ зависят от k общих факторов следующим образом:

$$x_i = \sum_{r=1}^{k} l_{ir} f_r + z_i,$$

где z_i независимы и распределены нормально $\left(0, \sigma_i^2\right)$, а факторы f_r не зависят один от другого и от z_i и распределены нормально (0,1). Через L обозначается матрица $\|l_{ir}\|$, через V — диагональная матрица с ненулевыми элементами $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2$,

$$C = \|E\,[(x_i - E(x_i))\,(x_j - E(x_j))]\|.$$

Очевидно, $C = LL' + V$. При $k > 1$ матрица L определяется через C и V не единственным образом. Одним из способов определения L является центроидный метод. Предположим теперь, что каждая величина x_i измеряется n раз. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица вторых моментов выборки. Центроидный метод дает оценки l^*_{ij} для l_{ij}, являющиеся функциями a_{rm} и σ^2_s. Исследуется, в частности, эффективность этого метода. Сравнивая центроидный метод с методом максимального правдоподобия, автор отмечает довольно высокую эффективность первого метода и относительную простоту вычислений, связанных с ним. В. В. Петров

4237. Распространение распределения Колмогорова. Блэкман (An extension of the Kolmogorov distribution. Blackman Jerome), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 513—520 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{nk}$ — независимые результаты измерений случайной переменной X с непрерывным распределением $F(x)$. Пусть по наблюдениям первой группы образовано эмпирическое распределение $F_n(x)$, а по наблюдениям второй — $G_{nk}(x)$. Устанавливаются точные значения вероятностей

$$P\{-y < F_n(s) - G_{nk}(s) < x \text{ для любых } s\}$$

и

$$P\{-y < F(s) - F_n(s) < x \text{ для любых } s\}.$$

Выражения для этих вероятностей получены для конечных n, причем из них следуют асимптотические формулы для больших n. Доказательство основано на идее сведения этой задачи к задаче о случайном блуждании, применявшейся в работах Б. В. Гнеденко и его учеников. А. М. Бендерский

4238. Максимальная разность между ординатами характеристик единичных планов. Одерфельд (Najwieksza róznica miedzy rzednymi charakterystyk planów pojedynczych. Oderfeld Jan), Zastosow. mat., 1954, 1, № 3, 225—230 (польск.; рез. русс., англ.)

Статистический прием товаров, отдельные штуки которых можно альтернативно зачислять к годным или негодным, с математической точки зрения вполне определен так называемой характеристикой плана испытаний. В случае единичного испытания характеристикой плана является зависимость $p = f(w; m, n)$, где p — вероятность того, что партия будет принята, w — коэффициент недоброкачественности, n — объем выборки, m — максимальное число негодных штук в выборке, при котором партию можно еще принять. Выбор той или иной пары значений m и n влечет за собой экономические следствия. Эти следствия можно изучать методом сравнения графиков характеристик, в частности измеряя разности ординат между характеристиками двух планов с параметрами m_1, n_1 и m_2, n_2. Характеристическими значениями этих разностей являются их экстремальные значения.

Реферируемая работа содержит аналитическое решение задачи определения экстремальных разностей между ординатами характеристик двух планов и определение коэффициентов недоброкачественности, при которых встречаются эти экстремальные значения. Автор приводит два численных метода решения — приближенный и точный. Приближенный метод пользуется таблицами распределения вероятностей по закону Пуассона, точный метод заключается в итерации результатов, полученных первым методом. Полученные в работе результаты можно с успехом применить к эффективному разрешению сформулированной в ее начале проблемы. C. Rajski

4239. Обобщение критерия Кендалла корреляции рангов. II. Терпстра (A generalization of Kendall's rank correlation statistic. II. Terpstra T. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 1, 59—66; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 59—66 (англ.)

Продолжение исследования автора (РЖМат, 1957, 695). Дается вывод математического ожидания и дисперсии критерия S при различных гипотезах относительно рассматриваемых величин. Доказываются две теоремы об асимптотической нормальности S в определенных условиях. Н. В. Смирнов

4240. Вероятности χ^2 для большого числа степеней свободы. Уишарт (χ^2 probabilities for large numbers of degrees of freedom. Wishart John), Biometrika, 1956, 43, № 1, 92—95 (англ.)

Рассматривается случайная величина $x = \sqrt{\nu/2}\ln\chi^2/\nu$, где ν — число степеней свободы величины χ^2. Плотность распределения $f(x)$ величины x находится в виде произведения нормальной плотности на степенной ряд, коэффициенты которого выражаются через отрицательные степени $\sqrt{\nu}$. $\int_0^X f(x)\,dx$ также представляется рядом по степеням величины $\nu^{-1/2}$, коэффициенты которого представляют собой линейные комбинации неполных нормальных функций моментов

$$m_n(X) = \frac{1}{(n-1)(n-3)\ldots 1 \text{ или } 2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^X x^n e^{-x^2/2}dx.$$

Рассматриваются числовые примеры и показывается соответствие результатов, полученных по формулам автора, результатам, которые можно получить при помощи биометрических таблиц и таблиц Слуцкого. Автор указывает на то, что выведенные им формулы могут быть использованы для табулирования вероятностей отношения χ^2/ν с нужной степенью точности и для приближенного нахождения этих вероятностей без применения таблиц. Некоторые специальные приложения полученных формул автор обещает дать в следующей работе. Б. Н. Гэртштейн

4241. Оценка параметров усеченного гамма-распределения. Чапман (Estimating the parameters of a truncated gamma distribution. Chapman Douglas G.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 498—506 (англ.)

Пусть n наблюдений сведены в разряды $(\xi_i - h_i, \xi_i + h_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$, где $\xi_1 - h_1 = 0$, $\xi_r + h_r = T$, $\xi_i + h_i = \xi_{i+1} - h_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. Обозначим через ν_i число наблюдений, содержащихся в разряде i, т. е. между $\xi_i - h_i$ и $\xi_i + h_i$.

Тогда оценки параметров усеченного гамма-распределения с плотностью вероятности

$$f(x) = K^{-1}e^{-ax}x^{b-1},\ 0 \leqslant x \leqslant T,$$

где $K(ab) = \int_0^T e^{-ax}x^{b-1}dx$,

определяются следующим образом.

Положим

$$p_i = K^{-1}\int_{\xi_i - h_i}^{\xi_i + h_i} e^{-ax}x^{b-1}dx \approx K^{-1}e^{-a\xi_i}\xi_i^{b-1}(2h_i),$$

$$q_i = \nu_i/n,\ \ln p_i - \ln p_{i+1} = a(\xi_{i+1} - \xi_i) +$$

$$+ (b-1)\ln\xi_i/\xi_{i+1} + \ln h_i/h_{i+1},\ i = 1, \ldots, r-1.$$

Разлагая

$$\ln(q_i/p_i) = \ln(1 + (q_i - p_i)/p_i)$$

в ряд Тейлора и ограничиваясь членами порядка $1/n$, получим

$$E(\ln q_i) = \ln p_i - \frac{1}{2n}\frac{1-p_i}{p_i},$$

$$E(\ln q_i - \ln p_i)^2 = \frac{1}{n}\frac{1-p_i}{p_i},$$

$$E\left[\left(\ln\frac{q_i}{p_i}\right)\left(\ln\frac{q_j}{p_j}\right)\right] = -\frac{1}{n}.$$

А. К. Митропольский

4242. Асимптотическое разложение распределения экстремальных значений выборки. Узгёрен (The asymptotic development of the distribution of the extreme values of a sample. Uzgören Nakibe T.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 346—353 (англ.)

Если $F(x)$ — функция распределения совокупности, из которой производится выборка размера n, то $F^n(x)$ — функция распределения максимального члена выборки. Предполагается, что функция $F(x)$, по крайней мере для больших x, непрерывна и дифференцируема, $f(x)=F'(x)\neq 0$ и $f(x)<\infty$ для достаточно больших x, $F(x)<1$ для всех x и $\lim_{x\to\infty} g'(x)=0$, где $g(x)=[1-F(x)]/f(x)$.

В этих предположениях получено разложение

$$\log[-\log F^n(x)] = -u - \frac{u^2}{2!}\left[\frac{d(1/g)}{dx}\right]_{x=x_n} g^2(x_n) - \ldots - \frac{u^m}{m!}\left[\frac{d^{m-1}(1/g)}{dx^{m-1}}\right]_{x=x_n} g^m(x_\eta) - \ldots,$$

где x_n — решение уравнения $1-F(x_n)=1/n$, $u=(x-x_n)/g(x_n)$. В частности для нормальной функции с дисперсией 1/2

$$x_n \sim \sqrt{\log\frac{n}{2\sqrt{\pi}}} \text{ и } \log[-\log\Phi^n(x)] = -u - \frac{u^2}{2\cdot 2}\frac{1}{\log\frac{n}{2\sqrt{\pi}}} - \frac{u^3}{3\cdot 2^3}\frac{1}{\left(\log\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^3} + \cdot$$

$$+\ldots+(-1)^m\frac{u^m}{m2^m}\frac{1}{\left(\log\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^m}+\ldots \text{ (общий член}$$

записан для $m\geqslant 3$). Б. Н. Гартштейн

4243. Асимптотические решения сложных разрешающих проблем для двух полностью определенных распределений. Ханнан, Роббинс (Asymptotic solutions of the compound decision problem for two completely specified distributions. Hannan James F., Robbins Herbert), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 1, 37—51 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайные независимые величины, x_i имеет функцию распределения $F(x,\theta_i)$, где θ_i может принимать лишь два значения 0 и 1. Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор из n наблюдений величин x_i; требуется на основе этих наблюдений решить, какое значение 0 или 1 принимают параметры θ_i при $i=1,2,\ldots,n$. Рандомизированной разрешающей функцией Ф называется вектор $\mathbf{t}(t_1(\mathbf{x}),\ldots,t_n(\mathbf{x}))$, если для $i=1,2,\ldots,n$ $0\leqslant t_i(\mathbf{x})\leqslant 1$ и если при данном $\mathbf{x}$ условные вероятности принять решение, что $\theta_i=0$ или $\theta_i=1$, соответственно равны $1-t_i(\mathbf{x})$ и $t_i(\mathbf{x})$. Разрешающая функция проста, если $t_i(\mathbf{x})=t(x_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. Потери от неправильных решений оцениваются данными числами. Автор показывает, что в том случае, когда доля единиц среди значений θ_i, $i=1,2,\ldots,n$, приближенно известна, может быть построена простая разрешающая функция такая, что средняя потеря (риск) при использовании соответствующего правила будет с той же степенью погрешности равна минимальному возможному риску в классе всех простых разрешающих функций. Далее показывается, что при больших n существуют хорошие состоятельные оценки для доли единиц среди θ_i.

Используя эти два результата, автор конструирует сложную разрешающую функцию, которая для больших n обладает почти наверное теми же оптимальными свойствами, как и ранее построенная простая, даже в том случае, когда доля единиц в точности известна. Н. В. Смирнов

4244. Опыт в статистических решающих проблемах. Фабиан, Шпачек (Experience in statistical decision problems. Fabian Václav, Špaček Antonín), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 2, 190—194 (англ.; рез. русс.)

Рассматривается статистическая проблема, решением которой является случайная последовательность решающих функций; построение этой последовательности опирается на каждом шагу на предыдущий опыт. Последовательность потерь сходится $(C, 1)$ к потере Байеса с вероятностью 1. Резюме авторов

4245. Линейная корреляция. Стефанов (Линейна корелация. Стефанов Г.), Строительство, 1956, **3**, № 3—4, 43—46 (болг.)

4246. Метод получения упорядоченной метрической шкалы. Сигел (A method for obtaining an ordered metric scale. Siegel Sidney), Psychometrika, 1956, **21**, № 2, 207—216 (англ.)

4247 К. Статистика. Типпетт (Statistics. 2nd ed. Tippett Leonard Henry Caleb. London, Oxford Univ. Press, 1956, vi, 224 pp., 7 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 317, 9 (англ.)

4248 Д. Мощность процедур испытания для некоторой не полностью определенной и смешанной моделей. Бозивич (Power of test procedures for certain incompletely specified random and mixed models. Bozivich Helen. — Abstr. doct. diss., Iowa State Coll., 1955)., Iowa State Coll. J. Sci., 1956, **30**, № 3, 330—331 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

4249. Конструктивное доказательство теоремы о минимаксе. Данциг (Constructive proof of the Min-Max theorem. Dantzig George B.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 1, 25—33 (англ.)

Приводится конструктивное доказательство основной теоремы конечных нулевых игр двух лиц.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots 0 \\ -1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & \ldots 0 \\ -1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots 1, \end{array} \qquad (1)$$

где $\|a_{ij}\|$ есть матрица исходной игры. Обозначим через $p_0, p_1, \ldots, p_{n+m}$ — столбцы матрицы (1). Пусть $B=[p_0, p_{j_1}, \ldots, p_{j_m}]$ — невырожденная подматрица, состоящая из $m+1$ столбца (включая p_0) и называемая базисом, а β_i — i-я строка матрицы B^{-1}.

Доказательство основной теоремы о минимаксе содержится в доказательстве следующей теоремы: Если для всех $j=1,\ldots,m+n$

$$\beta_0 p_j \leqslant 0, \qquad (2)$$

то компоненты нулевой строки и нулевого столбца матрицы B^{-1} дают требуемые оптимальные стратегии.

Задача отыскания базиса со свойством (2) аналогична задаче о нахождении базиса в симплекс-методе Данцига. Для иллюстрации приведено решение игры с матрицей порядка 3×6. И. Л. Канторович

4250. Линейное программирование. Данё (Lineaer programmering. Danø Sven), Nord. mat. tidskr., 1956, 4, № 3, 121—138, 175—176 (дат.; рез. англ.)

Описывается применение симплекс-метода для решения основной задачи линейного программирования.

И. Л. Канторович

4251. О системах различных представителей. Гоффман, Кун (On systems of distinct representatives. Hoffman A. J., Kuhn H. W.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 199—206 (англ.)

Пусть $\mathfrak{T}=\{T_1, \ldots, T_p\}$ — конечное разбиение множества S, $\mathfrak{S}=\{S_1 \ldots, S_n\}$ — произвольное семейство подмножеств S, а $0 \leqslant c_k \leqslant d_k$ $(k=1, \ldots, p)$ — натуральные числа. Тогда для того, чтобы существовала система R различных представителей подмножеств из $\mathfrak{S}$ (РЖМат, 1954, 1990), для которой $c_k \leqslant \overline{R \cap T_k} \leqslant d_k$ при $k=1, \ldots, p$ (для множества A через $\overline{A}$ обозначается число его элементов), необходимо и достаточно, чтобы для всех $A \subset \{1, \ldots, n\}$ и $B \subset \{1, \ldots, p\}$ имели место соотношения

$$\overline{\bigcup_{j \in A} S_j \cap \bigcup_{k \in B} T_k} \geqslant \overline{A} - n + \sum_{k \in B} c_k,$$

$$\overline{\bigcup_{j \in A} S_j \cap \bigcup_{k \in B} T_k} \geqslant \overline{A} - \sum_{k \in B} d_k.$$

Эта комбинаторная теорема доказывается методами теории линейного программирования. Частный ее случай см. РЖМат, 1957, 3358.

Н. Н. Воробьев

4252. Исправления к статье «О методе «симплекса» в линейном программировании». Сан-Хуан-Льоса (Correcciones al artículo «El método del «simplex» de la programación lineal». San Juan Llosá Ricardo), Rev. cienc. apl., 1955, 9, № 2, 133—136 (исп.)

См. РЖМат, 1956, 1557.

4253. Монотонная аппроксимация в динамическом программировании и в вариационном исчислении. Белман (Monotone approximation in dynamic programming and the calculus of variations. Bellman Richard), Proc. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 11, 1073—1075 (англ.)

Излагается подход к задачам теории динамического программирования, позволяющий получить интересные результаты в вариационном исчислении.

Г. Ш. Рубинштейн

4254. О современных проблемах эконометрики. Никайдо (計量經濟學における最近の話題について. 二階堂副包), 數學, Сугаку, 1956, 8, № 1, 40—53 (япон.)

4255. Графическое решение проблемы перевозок. Видале (A graphical solution of the transportation problem. Vidale Marcello L.), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 193—203 (англ.)

Предлагается графическое решение задачи составления оптимального плана перевозок однородного груза от нескольких пунктов производства к ряду пунктов потребления, когда заданы производительности в пунктах производства, потребления в пунктах потребления и затраты по перевозке единицы продукта из каждого пункта производства в любой пункт потребления.

Рассматриваются также задачи, в которых расположение пунктов производства и производительности в них можно варьировать.

Г. Ш. Рубинштейн

4256. Об оптимальных свойствах боезапаса для батарейной очереди. Уолш (Optimum ammunition properties for salvos. Walsh John E.), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 204—212 (англ.)

Вычисляется максимальная вероятность уничтожения d-мерной цели T очередью из n выстрелов. Пусть $y=(y_1, \ldots, y_d)$ — точкой падения снаряда; $x=(x_1, \ldots, x_d)$ — ошибка прицеливания; $V(y)$ — условная вероятность того, что снаряд с точки падения y поражает цель; $A(x)$ — плотность распределения ошибки прицеливания x.

Если $p(x)$ — условная вероятность поражения цели выстрелом с ожидаемой точки падения снаряда x, то вероятность поражения ее очередью выразится величиной

$$P_K = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \{1-[1-p(x)]^n\} A(x)\, dx.$$

Доказывается, что $\max P_K$ достигается для

$$p(x) = \begin{cases} 1-[C/A(x)]^{1/(n-1)}, & A(x) \geqslant C, \\ 0, & A(x) < C. \end{cases}$$

Постоянная C определяется из равенства

$$\int \ldots \int_{A(x)>0} \{1-[C/A(x)]^{1/(n-1)}\}\, dx = \int \ldots \int_T V(y)\, dy.$$

Доказательство проводится обычными методами вариационного исчисления. Предполагается, что $V(y)$ не зависит от предшествовавших попаданий, а также, что выполняется ряд других условий.

И. А. Ибрагимов

4257. Краткий очерк развития военного исследования операций в Канаде. Мортон (A brief history of the development of Canadian military operational research. Morton N. W.), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 187—192 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

4258. Введение в статистическую теорию турбулентности. II. Кампе-де-Ферье (Introduction to the statistical theory of turbulence. II. Kampé de Fériet J.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, 2, № 3, 143—174 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 3368.

В гл. I рассматриваются усеченные функции $u_T(t)$, равные $u(t)$ при $|t| \leqslant T$ и нулю при $|t|>T$. Излагаются свойства преобразования Фурье $\alpha_T(t)$ функции $u_T(t)$, ее корреляционной функции $\rho_T(h)$, спектральной плотности $f_T(\lambda)=T\pi^{-1}|\alpha_T(\lambda)|^2$ и спектра $S_T(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f_T(\lambda)\, d\lambda$. Указываются разложения корреляционной функции и спектральной плотности в тригонометрические ряды.

В гл. II рассматриваются функции $u(t)$, $-\infty<t<\infty$, принадлежащие на каждом конечном интервале к классу L^2 и обладающие тем свойством, что корреляционная функция $\rho_T(h)$ усеченной функции $u_T(t)$ при $T \to \infty$ стремится к предельной функции $\rho(h)$, непрерывной в точке $h=0$. Класс S таких функций является подмножеством гильбертова пространства. Излагаются свойства функции $\rho(h)$; в частности доказывается формула

$$\rho(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t+h)\, u^*(t)\, dt.$$

Доказывается, что для функций класса S спектр усеченной функции $S_T(\lambda)$ имеет при $T \to \infty$ предел $S(\lambda)$ и $\rho(h)$ является трансформацией Фурье—

Стилтьеса для $S(\lambda)$ Выясняются условия абсолютной непрерывности спектра $S(\lambda)$; достаточным условием является абсолютная интегрируемость $\rho(h)$. Наконец, выясняются условия существования предела $\alpha(\lambda)$ для компонент Фурье $\alpha_T(\lambda)$ усеченной функции при $T \to \infty$; достаточным условием является $\rho(h) \in L(-\infty, \infty)$, причем $\alpha(\lambda)$ оказывается равной нулю. Библ. 43 назв.

А. С. Монин

4259. Введение в статистическую теорию турбулентности. III. Кампе-де-Ферье (Introduction to the statistical theory of turbulence.III. Kampé de Fériet J.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, 2, № 4, 244—271 (англ.)

В гл. III изучаются корреляционный и спектральный тензоры векторной функции $u_j(t)$, все компоненты которой принадлежат классу L^2, причем вначале изучаются усеченные функции $u_j(t, T)$, отличные от нуля лишь при $|t| \leqslant T$, а затем выясняется возможность предельного перехода.

В частности, если корреляционный тензор усеченной функции $\rho_{jk}(h, T)$ имеет предел $\rho_{jk}(h)$, причем диагональные элементы $\rho_{jj}(h)$ непрерывны в точке $h=0$, то спектр усеченной функции $S_{jk}(\lambda, T)$ имеет предел, являющийся функцией ограниченной вариации.

В гл. IV рассматриваются трехмерные векторные функции $u_j(x)$ от координат $x=(x_1, x_2, x_3)$ точки трехмерного пространства X, квадрат модуля которых интегрируем по любой ограниченной области B. Вначале рассматриваются усеченные функции $u_j(x, B)$, отличные от нуля лишь в области B, и изучаются свойства их компонент Фурье $\alpha_j(\lambda, B)$ (λ — волновой вектор), корреляционного тензора $\rho_{jk}(h, B)$ и его преобразования Фурье — спектрального тензора $f_{jk}(h, B)$. Вводится понятие о спектральной плотности энергии

$$f_B(K) = \frac{V_B}{(2\pi)^3} \int_{S_K} \sum_{j=1}^{3} |\alpha_j(\lambda, B)|^2 \, dS,$$

где S — сфера в волновом пространстве с центром в начале координат и радиусом K, и об энергетическом спектре $S_B(K) = \int_0^K f_B(\xi)\, \xi^2 d\xi$. Устанавливается соотношение между энергетическим спектром и корреляционным тензором. Рассматривается предельный переход от ограниченной области B ко всему неограниченному пространству X. Если корреляционный тензор имеет предел и диагональные элементы предельного тензора непрерывны в нуле, то спектр $S_B(K)$ имеет предел $S(K)$, но спектральная плотность может и не иметь предела в некоторых точках. При этом

$$S(K) = \frac{1}{2\pi^2} \int_X \frac{\sin K\eta - K\eta \cos K\eta}{\eta^3} \sum_j \rho_{jj}(h)\, d\eta,$$

где η — модуль вектора h. Отмечается, что для функций $u_j(x, t)$ от пространственных координат и времени гармонический анализ может быть произведен одновременно по всем переменным.

В гл. V излагаются основные понятия статистической механики. Вводятся понятия о фазовом пространстве и траектории системы в нем, о средних по времени и по ансамблю для функций от фазовой точки ω. Движение фазовых точек вдоль траекторий описывается с помощью преобразований T_t фазового пространства в себе, образующих абелеву группу. Соответствующие движения в фазовом пространстве интерпретируются как течение жидкости, плотность которой может рассматриваться как плотность вероятности в фазовом пространстве. Для консервативной динамической системы с конечным числом степеней свободы формулируются теорема Лиувилля и эргодическая теорема. Дается определение случайной функции времени $F(t, \omega)$ и стационарной случайной функции $F(t, \omega) = f(T_t\omega)$. Указывается обобщение при замене оси времени абстрактной группой. Приводятся примеры.

А. С. Монин

4260. Введение в статистическую теорию турбулентности. IV. Кампе-де-Ферье (Introduction to the statistical theory of turbulence. IV. Kampé de Fériet J.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 2, 90—117 (англ.)

В гл. VI излагаются вопросы кинематики однородной турбулентности в несжимаемой жидкости. Дается определение пространственно-однородного случайного векторного поля $u_j(x, \omega) = f_j(T_x\omega)$, где $T_x = T^{(1)}_{x_1} T^{(2)}_{x_2} T^{(3)}_{x_3}$ — трехпараметрическая абелева группа одно-однозначных преобразований фазового пространства $\Omega = \{\omega\}$ в себя, сохраняющих меру на Ω.

Вводится корреляционный тензор $\rho_{jk}(h)$; при условии непрерывности в нуле его диагональных компонент все компоненты равномерно непрерывны в неограниченном пространстве значений вектора h, и векторное поле называется статистически непрерывным (что эквивалентно непрерывности $u_j(x, \omega)$ в среднем квадратичном по мере на Ω), причем справедлива теорема Крамера

$$\rho_{jk}(h) = \int e^{i\lambda h} dS_{jk}(\lambda),$$

$S_{jk}(\lambda)$ — функции ограниченной вариации, образующие спектральный тензор (диагональные его элементы суть действительные неубывающие функции). Для скалярного однородного случайного поля такая теорема впервые доказана А. Я. Хинчиным. Указанная теорема формулируется в абстрактной форме. Именно, каждой слабо непрерывной группе унитарных преобразований U_x гильбертова пространства H измеримых функций $f(\omega) \in L^2(\Omega)$ соответствует такое множество проективных операторов E_λ, что

$$(U_x f, g) = \int_\Lambda e^{i\lambda x} d(E_\lambda f, g),$$

где f, g — любые функции из H. Изучаются свойства спектрального тензора. Рассматривается случай, когда все его компоненты абсолютно непрерывны, так что существует тензор спектральной плотности $\varphi_{jk}(\lambda)$. Его инвариант $\varphi(\lambda)/2 = \sum_j \varphi_{jj}(\lambda)/2$ имеет смысл плотности кинетической энергии в пространстве Λ частот λ.

В дальнейшем предполагается, что турбулентные компоненты скорости u_j непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по координатам. Вследствие несжимаемости выполняются соотношения $\sum_k \frac{\partial \rho_{jk}}{\partial h_k} \sum_j \frac{\partial \rho_{jk}}{\partial n_j} = 0$, или, в спектральной форме $\sum_j \lambda_j \varphi_{jk} = 0$.

Доказывается, что тензор спектральной плотности имеет общий вид $\varphi_{jk}(\lambda) = a_j(\lambda)\, a_k^*(\lambda) + b_j(\lambda)\, b_R^*(\lambda) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) a_j a_k^* + b^2 \left(\delta_{jk} - \frac{\lambda_j \lambda_k}{|\lambda|^2}\right)$. Приводятся выра-

жения для корреляционного и спектрального тензоров вихря скорости, вводится понятие о масштабе турбулентности L:

$$L^2 = \int_\Delta \varphi(\lambda)\, d\lambda / 2 \int_\Delta |\lambda|^2 \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Указывается упрощение в виде $\varphi_{jk}(\lambda)$ в случае изотропной турбулентности.

В гл. VII излагаются вопросы динамики однородной турбулентности. Осреднением уравнений Навье—Стокса получаются уравнения Рейнольдса. Допускается, что однородная в начальный момент турбулентность остается однородной с течением времени. Выводится уравнение энергии

$$\int_\Delta \theta(\lambda, t)\, d\lambda = 0, \quad \theta(\lambda, t) = \frac{\partial \varphi(\lambda, t)}{\partial t} + 2\nu |\lambda|^2 \varphi(\lambda, t).$$

В случае $\theta = 0$ (отсутствие обмена энергией между компонентами движения с различными волновыми числами) уравнение для $\varphi(\lambda, t)$ легко решается, и при подходящем начальном условии может быть получен «закон вырождения турбулентности» Л. Г. Лойцянского $E = A(\nu t)^{-5/2}$ (A — постоянная). Показывается, что гипотеза $\partial\theta/\partial t = 0$ приводит к противоречию.

В гл. VIII обсуждаются возможности построения статистической механики жидкостей по аналогии с механикой систем с конечным числом степеней свободы. Отмечается, что для жидкости не имеет места теорема единственности, а наличие диссипации энергии затрудняет определения инвариантной меры в фазовом пространстве. А. С. Монин

4261. Когда нестационарный случайный процесс можно заменять стационарным. Тихонов В. И., Ж. техн. физики, 1956, 26, № 9, 2057—2059

Рассматривается нестационарный случайный процесс вида

$$\eta(t) = A\xi(t) \sin(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $\overline{\xi(t)\,\xi(t+\tau)} = K_\xi(\tau)$ (черта сверху означает осреднение), A — постоянная. Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ равна

$$\overline{\eta(t)\,\eta(t+\tau)} = K_\eta(t, \tau) = \\ = A^2 K_\xi(\tau) \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \omega\tau + \varphi). \qquad (2)$$

Однако в технической литературе при рассмотрении шумов типа (1) весьма часто в качестве корреляционной функции шума используется функция (2), осредненная по фазе φ:

$$\widetilde{K}_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\eta(t, \tau)\, d\varphi = \frac{1}{2} A^2 K_\xi(\tau) \cos\omega\tau, \qquad (3)$$

т. е. процесс $\eta(t)$ заменяется стационарным процессом с корреляционной функцией (3).

Для выяснения условий законности такой замены рассматривается специальная задача, в которой шум $\eta(t)$ воздействует на RC-контур с постоянной времени $RC = 1/\alpha$ и напряжение $\psi(t)$ на емкости (на пластинах конденсатора) регистрируется с помощью практически безинерционного прибора; при этом полагается для конкретности, что $K_\xi(\tau) = C\exp(-\beta|\tau|)$. Вычисляется средний квадрат случайной функции $\psi(t)$ как для шума вида (1), так и для случая стационарного шума $\eta(t)$, имеющего корреляционную функцию (3). Оказывается, что полученные результаты для $\overline{\psi^2(t)}$ можно считать одинаковыми лишь тогда, когда $\alpha \ll \beta \ll \omega$ (или иначе, когда $RC \gg \tau_k \gg T$, где $T = 2\pi/\omega$, $\tau_k = 1/\beta$ — «время корреляции» для $\xi(t)$); следовательно, для указанной задачи лишь при этом условии замена $\eta(t)$ на $\widetilde{\eta}(t)$ является законной. А. М. Яглом

4262. Эффективность статистического контроля типа $Д_1$. Эйделънант М. И., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 25—44

Под контролем типа $Д_1$ автор понимает всякий план контроля, если 1) в том случае, когда он заканчивается после проверки некоторой части партии, все оставшиеся изделия принимаются как годные; 2) все обнаруженные дефектные изделия заменяются годными. В качестве основной экономической характеристики плана контроля принимается математическое ожидание потерь $\bar{z}_D = M(z_D | D)$ при данном числе дефектных D в партии объема N $\bar{z}_D = D\beta + \bar{n}_D\gamma - (\beta - \alpha)\bar{d}_D$, где α и β — средние размеры потерь от одного обнаруженного и, соответственно, не обнаруженного дефектного изделия, γ — стоимость проверки одного изделия, $\bar{n}_D = M(n | D)$ — средний объем инспекций при данных D и N; d — число обнаруженных в выборке дефектных; $\bar{d}_D = M(d | D)$. Предполагается $\beta > \alpha$, в противном случае целесообразна бесконтрольная приемка партии. Сравнивая показатель $\bar{z}_D$ с величинами $z_{0D} = D\beta$ и $z_{ND} = D\alpha + N\beta$, представляющими потери при «стандартных» планах — бесконтрольной приемке и сплошном контроле, соответственно, автор получает ряд важных и просто доказываемых заключений. Ни один нестандартный план типа $Д_1$ в точке (N, D), в которой

$$\Delta = \bar{n}_D q - \bar{d}_D > 0, \quad q = D/N, \qquad (1)$$

не является оптимальным.

Если условие (1) выполняется для данного плана при любых q ($0 \leqslant q \leqslant 1$) (план $Д_1^*$), то при $q < q^* = \gamma/(\beta - \alpha)$ оптимальным является бесконтрольный прием, а при $q > q^*$ — 100%-ный контроль. Автор показывает, что последний случай имеет место для обычного плана однократного контроля с приемочным числом $c \geqslant 0$. В противоположность этому, если $\Delta < 0$ при всех N и q, то план контроля эффективен (в смысле величины потерь) по сравнению, по крайней мере, с одним из стандартных планов, а при условии $(D - \bar{d})/(N - \bar{n}_D) < q^* < \bar{d}_D/\bar{n}_D$ — экономичнее их обоих. Такой случай имеет место, например, тогда, когда план инспекции предусматривает окончание контроля, как только число обнаруженных дефектных изделий достигает заданного уровня C. В случае процедуры контроля по Доджу-Ромигу оказывается, что общие потери от дефектных изделий выше, чем при стандартных планах, хотя расходы на инспекцию минимальны. Н. В. Смирнов

4263. Понятие СОВ как характеристика инспекционного метода двойной выборки. Абруцци (The ASN concept in attributes double sampling plans. Abruzzi Adam), Rev. Inst. Internat. statist., 1954, 22, № 1—3, 48—56 (англ.)

При статистическом контроле качества продукции по методу двойной выборки производится следующая процедура: извлекается выборка объема n_1, а число x_1 дефектных изделий в ней сравнивается с заданными приемочными числами c_1 и c_2 ($> c_1$). Если $c_1 < x_1 \leqslant c_2$, то извлекается вторая выборка объема

n_2. Важной характеристикой такого метода является средний объем выборки (СОВ), определяемый формулой

$$\text{СОВ} = n_1 + n_2 \sum_{x_1=c_1+1}^{c_2} P(x_1),$$

где $P(x_1)$ — вероятность наличия в первой выборке ровно x_1 дефектных изделий, зависящая от доли p брака во всей продукции (для этой вероятности принимается биномиальная формула).

Вычисляется математическое ожидание СОВ при заданном априорном распределении для p, которое предполагается равномерным по интервалу (0,1), или $(0, p_{\max})$, или $(p_{\min}, p_{\max})$. Рассматривается также случай, когда окончательный вывод из инспекционной продукции делается ранее, чем исчерпана вторая выборка; в этом случае СОВ определяется более сложной формулой. А. С. Монин

4264. Оценка качества партии предметов при простой инспекции в случае разрушающих испытаний. Икеда (On the estimation of the quality of a group of lots by the single sampling inspection in destructive case. Ikeda Sadao), Osaka Math. J., 1955, 7, № 2, 131—156 (англ.)

В § 1 метод получения единственных несмещенных оценок в биномиальном случае (Girshick M. A., Mosteller F., Savage L. J., Ann. Math. Statistics, 1946, 17, 13—23; Savage L. J., там же, 1947, 18, 295—297; Wolfowitz J., там же, 1946, 17, 489—493) переносится на гипергеометрический случай. В § 3 получаются оценки качества партий по данным инспекции, аналогичные оценкам А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, Сер. матем., 1950, 14, 303—326; Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю, 1951, изд. Ленингр. дома научн.-техн. пропаганды. Последняя работа автором не упоминается.). И. И. Гихман

4265. О перемещении сыпучих сред. Литвиниишин (O przemieszczeniach ośrodków sypkich. Litwiniszyn J.), Zastosowania mat., 1956, 2, № 4, 380—389 (польск.; рез. русск., англ.)

Обсуждаются вертикальные перемещения для крупинок сыпучих сред, вызываемые высыпанием из некоторых областей, которые затем наполняются за счет верхних слоев. Рассматривая плоские перемещения, автор предполагает, что если на высоте z_1 форма отклонения от первоначальной горизонтальной линии x_1 дается функцией $W(k(z_1), x_1)$, где данная функция $k(z)$ характеризует физические свойства среды, то на высоте z_2 отклонение от первоначальной горизонтальной линии x_2 дается функцией $W(k(z_1), x_1)\varphi(k(z_1), x_1; k(z_2), x_2)$, где функция перераспределения φ является одной и той же для всей среды. По принципу суперпозиции перемещений мы получим для функции φ интегральное уравнение, встречающееся в теории стохастических процессов, которое, как известно, сводится к дифференциальному уравнению в частных производных. При некоторых добавочных упрощающих предположениях автор получает уравнение диффузии. Решение этого уравнения с надлежащими начальными условиями хорошо сходится с данными геодезических измерений земляных перемещений около выработанных шахт. S. Drobot

4266. О сложных пуассоновских процессах и их применениях в страховании от заболеваний. Гофман (Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung. Hofmann Martin), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 3, 499—575 (нем.)

Пусть имеются две последовательности событий, подчиненные следующему условию: время появления события каждой последовательности — случайная величина, равномерно распределенная в каждом конечном интервале. Пусть $P(m, n; s, t)$ — вероятность того, что в промежутках времени длины s и t события первой и второй последовательности произойдут соответственно m и n раз. Тогда имеет место

$$P(m, n; s, t) = (-1)^{m+n} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^{m+n} P(0, 0; s, t)}{\partial s^m \partial t^n}.$$

Далее вводится понятие о семействе функций $V_2 = \{f(s, t)\}$. Это функции, которые в области $0 < s < \infty$, $0 < t < \infty$ удовлетворяют условиям

$$(-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} f(s, t)}{\partial s^m \partial t^n} \geqslant 0, \qquad \lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} f(s, t) = 1.$$

Для таких функций имеет место обобщение теоремы Уиддера-Бернштейна: функция $f(s, t)$ представима в виде интеграла Лапласа-Стилтьеса $f(s, t) = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \exp[-ks - \lambda t]\, dU(k, \lambda)$, где $U(k, \lambda)$ — двумерная интегральная функция распределения, $U(0, 0) = 0$. Так как $P(0, 0; s, t) \in V_2$, то

$$P(m, n; s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-ks - \lambda t] \frac{(ks)^m}{m!} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dU(k, \lambda).$$

Это соотношение характеризует сложный пуассоновский процесс, определяемый при помощи функции распределения $U(k, \lambda)$, которую автор называет структурной функцией.

Приводятся приемы конструирования сложных одномерных и двумерных пуассоновских процессов и соответствующих им структурных функций. Для этой цели используются также отрицательные биномиальные распределения.

Результаты, полученные для сложного пуассоновского процесса, применяются для решения задачи о распределении числа заболеваний лиц, работающих на предприятии, возникающей в страховой математике.

Анализом результатов статистических наблюдений в течение 1944—1952 гг. проверяется гипотеза о функциях распределения: а) числа заболеваний одного лица за время t; б) совместного распределения числа заболеваний, связанных с производством и не связанных с ним. Эти функции характеризуют соответствующие одномерные и двумерные сложные процессы Пуассона. Применение критерия χ^2 показывает удовлетворительное соответствие указанных выше теоретических распределений результатам наблюдений.

Частично рассматривается также вопрос о функции распределения случайной величины — расхода на 1 заболевание. Б. В. Финкельштейн

4267. Использование обратной величины нормальной переменной в текстильной статистике. Пурохит, Пхатарфорд (Use of the reciprocal of a normal variate in textile statistics. Purohit J. N., Phatarford R. M.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 23, 99—101 (англ.)

В процессе прядения должно выполняться требование, чтобы вес и крепость пряжи, приходящиеся на единицу длины, находились в некоторых допустимых пределах. В практике текстильного производства обычно контролируются вес и крепость пряжи, отнесенные к длине пасмы (120 ярдов) или петинки (840 ярдов).

Характеристикой качества пряжи, пропорциональной ее «тонине», является «номер пряжи», определяе-

мый как отношение длины пасмы (петинки) к весу пасмы (петинки). Длина пасмы фиксирована, а вес пасмы — случайная величина, распределение которой может быть приближенно оценено по опытным данным. Обычно распределение веса пасмы принимается нормальным. Задача статистического описания «номера пряжи» приводит к необходимости изучать распределение величины, обратной случайной величине с нормальным распределением.

Другой важной характеристикой пряжи является сопротивление разрыву пасмы, которое также считается случайной величиной с нормальным распределением. Совместное рассмотрение «номера пряжи» и сопротивления разрыву пасмы показывает наличие значительной отрицательной корреляции между ними (при возрастании в среднем «номера пряжи» сопротивление разрыву пасмы в среднем убывает). Крепость пряжи, которая определяется как сопротивление разрыву на единицу веса, можно найти делением сопротивления разрыву пасмы на вес пасмы. Таким образом возникает интерес к изучению распределения для отношения двух случайных нормально распределенных величин.

Для случая, когда x и y имеют двумерное нормальное распределение, указывается способ расчета вероятностей $P[1/x<t]$ и $P[x/y<t]$, основанный на использовании таблиц (Ed. Pearson K., Tables for Statisticians and Biometricians. Part I, 1945).

Н. П. Бусленко

4268. Вероятностная теория водохранилищ. Моран (A probability theory of dams and storage systems: modifications of the release rules. Moran P. A. P.), Austral. J. Appl. Sci., 1955, **6**, № 2, 117—130 (англ.)

Продолжение исследования автора (РЖМат, 1956, 9001) в следующих направлениях: 1) рассматриваются некоторые модификации правила расходования, 2) эти правила могут быть различны для различных месяцев года, 3) находится точное решение в случае экспоненциального распределения для стока, 4) найден удобный численный метод для получения приближенного решения в случае гамма-распределения для стока.

По резюме автора.

4269. Распределение смертей по «невыясненным» причинам. Ледерман (La répartition des décès de cause «indéterminée.» Ledermann S.), Rev. Inst. internat. statist., 1955, **23**, № 1—3, 47—57 (франц.; рез. англ.)

4270. Дискуссия. «Использование корреляционных функций при исследовании сервомеханизмов».— (Discussion on «The use of correlation techniques in the study of servomechanisms».—), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1955, **15**, № 10, 526 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 1670. Обсуждение использования термина coherence при применении корреляционных функций в теории сервомеханизмов. М. А. Айзерман

4271. Некоторые недавние приложения статистического анализа к проблемам индустрии. Гено (Quelques applications récentes de l'analyse statistique à des problèmes industriels. Guénot R.), Méc. industr., 1956, № 27, 5—23 (франц.)

4272 К. Курс страховой математики. Леви (Corso di matematica attuariale. Levi Eugenio. Milano, Ed. la goliardica, 1955, 276 p., 1600 L.), Bibliogr. ital., 1955, **89**, № 651—652, 355 (итал.)

4273 Д. Распределение корней алгебраического уравнения с переменными коэффициентами. Хамблен (Distributions of roots of algebraic equations with variable coefficients. Hamblen John Wesley. — Doct. diss. Purdue Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2226 (англ.)

Рассматриваются многочлены

$$\eta^n - \xi_1\eta^{n-1} + \xi_2\eta^{n-2} + \cdots + (-1)^n\xi_n = 0$$

со случайными вещественными или комплексными коэффициентами ξ_i, для которых известны вероятностные функции распределения; обсуждается проблема вычисления последних для корней η_i с помощью соотношений

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{n}\eta_i,\quad \xi_2 = \sum_{i<j}\eta_i\eta_j, \ldots, \xi_n = \prod_{i=1}^{n}\eta_i.$$

Якобиан такого преобразования равен $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Указывается, что получены искомые распределения при $n=2$ для различных случаев задания распределений коэффициентов ξ_1 и ξ_2.

В. С. Новоселов

См. также: 3683, 3684, 3692, 3727, 4004, 4064, 4391.

ГЕОМЕТРИЯ

4274. Загадки изображений. Дальман (Anschauungsschwierigkeiten. Dallmann P.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, **9**, № 4, 165—168 (нем.)

На сторонах правильного $2n$-угольника строятся попеременно наружу и внутрь равнобедренные прямоугольные треугольники таким образом, что стороны $2n$-угольника являются их гипотенузами. Вершины прямых углов этих треугольников соединяются с центром многоугольника и составляется произведение $P(2n)$ полученных отрезков. Показывается, что

$$\lim_{n\to\infty} P(2n) = 1.$$

Если все треугольники расположены вне многоугольника, то

$$\lim_{n\to\infty} P(2n) = e^{\pi},$$

если — внутри его, то

$$\lim_{n\to\infty} P(2n) = e^{-\pi}.$$

Решаются аналогичные вопросы для равносторонних треугольников и некоторые более общие вопросы.

Н. В. Наумович

4275. Координатные системы и проблема трех точек. Клинкенберг (Coordinate systems and the three point problem. Klinkenberg H.), Canad. Surveyor, 1955, **12**, № 8, 508—518 (англ.)

Топографическая задача о трех точках — определить положение точки P, зная углы между направлениями PA, PB, PC из точки P к трем данным точкам A,B,C, — решается с привлечением барицентрических координат. Кроме этого, излагаются методы Кассини и Коллинса решения указанной задачи. В формуле (21) имеются опечатки. Л. Л. Вербицкий

4276. О псевдоравнобедренных треугольниках. Родеха (Sobre los triangulos pseudoisosceles. Rodeja F. E. G.), Gac. mat., 1956, **8**, № 2—3, 65—68 (исп.)

Пользуясь соотношением между сторонами псевдоравнобедренного треугольника (треугольника с двумя равными внешними биссектрисами), автор исследует

возможные величины углов и границы их изменений в таких треугольниках. А. И. Нахимовская

4277. **О рациональных треугольниках. Фрода** (Asupra triunghiurilor raționale. Froda Alexandru), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 12, 1695—1701 (рум.; рез. русск., франц.)

Треугольник является рациональным, когда длины a, b, c его сторон являются положительными рациональными числами. Треугольник вырождается, когда площадь его равна нулю. Приводятся необходимые и достаточные условия, распространяющие формулу рациональных прямоугольных треугольников на любые невырождаемые треугольники.

Примечание референта. Автор не требует выражения площади треугольника рациональным числом. С. И. Зетель

4278. **Аналог теорем о пересечении высот треугольника в одной точке для случая поверхностей. Мойсил** (Un analogon pentru suprafețe a teoremei concurenței înălțimilor unui triunghi. Moisil Gr. C.), Gaz. mat. și fiz., 1955, A7, № 7, 293—294 (рум.; рез. русск., франц.)

На поверхности рассматриваются шесть семейств кривых Φ_i, Ψ_i $(i=1, 2, 3)$, образующих следующую конфигурацию: через текущую точку A проходят кривые Φ_2 и Φ_3, через точку B кривой Φ_3 проходит кривая Φ_1, пересекающая кривую Φ_2 в точке C; кривые Ψ_i, проходящие соответственно через точки A, B, C, пересекаются в одной точке.

Доказана теорема: если шесть семейств кривых на поверхности образуют такую конфигурацию и кривые Ψ_1, Ψ_2 соответственно ортогональны кривым Φ_1 и Φ_2, то и кривые семейства Ψ_3 ортогональны кривым семейства Φ_3. Н. М. Остиану

4279. **Суммы двугранных и трехгранных углов тетраэдра. Джарден** (The sums of the dihedral and trihedral angles in a tetrahedron. Jarden), Riveon lemat., 1954, 8, 32 (иврит, рез. англ.).

Неравенство Гаддама (Gaddum J. W., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 370—371) $2\pi < S < 3\pi$ следует из неравенства $0 < T < 2\pi$ при $T = 2S - 4\pi$, где S — сумма двугранных углов, а T — сумма трехгранных (телесных) углов тетраэдра. В реферируемой статье снова приводится доказательство неравенства $0 < T < 2\pi$, опубликованного ранее автором (тогда под фамилией Джузук (Juzuk Dov, Technika Umada. 1941, 4, № 5 (26), 8—9)). Резюме автора

4280. **Медианы, медианный треугольник, аликвотный треугольник плоского треугольника. Сатерли** (The medians, the median triangle and the aliquot triangle of a plane triangle. Satterly John), Math. Gaz., 1956, 40, № 332, 109—113 (англ.)

Статья является продолжением заметки (РЖМат, 1955, 3888). В треугольнике ABC на сторонах отложены отрезки BD, CE и AF так, что

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{N},$$

где N — целое число. Треугольник DEF — аликвотный треугольник со сторонами d, e и f. Прямые AD, BE, CF — медианы треугольника. Из медиан треугольника можно построить треугольник ADH со сторонами n_1, n_2, n_3. Медианы, пересекаясь, образуют треугольник XYZ со сторонами x, y, z. Треугольники DEF, ADH, XYZ обладают рядом интересных свойств, из которых отметим следующие:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{d^2+e^2+f^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{N^2-3N+3}{N^2},$$

$$\frac{\triangle ADH}{\triangle ABC} = \frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{N^2-N+1}{N^2},$$

$$\frac{\triangle XYZ}{\triangle ABC} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(N-2)^2}{N^2-N+1}.$$

Примечание референта. Кроме рассматриваемых автором внутренних медиан треугольника можно аналогично построить внешние медианы. С. И. Зетель

4281. **Косые подеры. Невилл** (Oblique pedals. Neville E. H.), Math. Gaz., 1954, 38, № 325, 166—171 (англ.)

Автор исходит из основной теоремы Вильсона-Галатли-Барроу: Если из двух изогонально сопряженных точек P и Q треугольника ABC провести прямые PD, PE, PF, и QL, QM, QN так, что углы $(PD, a)=(PE, b)=(PF, c)=(a, QL)=(b, QM)=(c, QN)$, то точки D, E, F, L, M, N лежат на окружности. В частном случае, если приведенные прямые перпендикулярны сторонам треугольника, то центр окружности лежит в точке O_0 в середине отрезка PQ; пусть радиус в этом частном случае равен ρ_0. В общем случае радиус окружности равен $\rho_0 \sec\psi$, где $\psi = \angle O_0PO$. Справедлива обратная теорема: если круг пересекает стороны треугольника соответственно в точках D и L, E и M, F и N, то общая точка пересечения кругов, описанных около треугольников AEF, BFD и CDE, и общая точка кругов — AMN, BNL, CLM — изогонально сопряженные точки и шесть перечисленных точек являются основаниями косых подер изогональных точек. Приводятся метрические соотношения, например

$$HO_0^2 + \frac{1}{4}PQ^2 - 2\rho_0^2 = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2),$$

где H — ортоцентр треугольника, а R — радиус описанной окружности. В заключение доказана следующая теорема: круг, касающийся конического сечения в концах хорды, параллельной фокальной оси, есть косоподерный круг. С. И. Зетель

4282. **О тетраэдрах с конгруэнтными гранями. Хеброни** (On tetrahedra with congruent faces. Hebroni P.), Riveon lemat., 1955, 9, 25—28 (иврит, рез. англ.)

Пусть $E = ABCD$ — тетраэдр, удовлетворяющий следующим условиям: (I) все его грани конгруэнтны; (II) все стороны каждой грани различны.

Тетраэдр, удовлетворяющий условию (I), автор называет (PK)-тетраэдром. С каждой гранью $S_D = ABC$ жестко связано трехмерное евклидово пространство R_D. Каждой точке P_A пространства R_A соответствует гомологичная точка P_B в R_B $(CDAP_B \cong DCBP_A)$. Четыре гомологичные точки P_A, P_B, P_C и P_D образуют тетраэдр гомологичных точек.

Пусть U_1, соответственно U_2 и U_3 — общие нормали к AD и BC (соответственно к BD и AC, DC и AB). Преобразование пространства поворотом на 180° вокруг произвольной прямой K называется поворотом вокруг K. Имеют место следующие теоремы:

1. Тетраэдр $E = ABCD$ является (PK)-тетраэдром тогда и только тогда, если противоположные ребра одинаковы.

2. Нормаль U_1 делит ребра AD и BC пополам, U_1, U_2 и U_3 пересекаются друг с другом под прямыми углами в центре M вписанной и описанной сферы.

3. В пространстве тетраэдра E существует ∞^3 тетраэдров гомологичных точек, каждый из которых является (PK)-тетраэдром. Нормали U_1, U_2 и U_3 перпендикулярны к парам соответствующих ребер этих тетраэдров и делят их пополам. Все вписанные и описанные около этих тетраэдров сферы имеют общий центр M.

4. Поворотом вокруг нормалей U_1, U_2 и U_3 все тетраэды гомологичных точек преобразуются сами в себя. Перестановки вершин при этих поворотах образуют вместе с идентичной перестановкой «четверную группу» Клейна («Vierergruppe»).

5. Тетраэдр гомологичных точек P_A, P_B, P_C, P_D регулярен, если каждая вершина P_A находится на одинаковом расстоянии от U_1, U_2 и U_3, и только в этом случае. Резюме автора

4283. Циклоидальное преобразование. Пуавер (La transformation cycloïdale. Poivert Jules), Ingenieur, 1956, 42, № 165, 34—42 (франц.).

Автор вводит понятие циклоидального преобразования точек $P \to P'$ на плоскости. При заданном центре O и константе c отрезок $PP' = c$ и образует с прямой OP угол ω, пропорциональный расстоянию $OP = d$. Рассматриваются свойства циклоидального преобразования. К работе прилагаются комментарии Картье (Cartier J.), в которых указываются примеры преобразований простейших линий и высказываются замечания о работе. Б. Н. Саморуков

4284. Об одной конкурсной задаче для технических институтов. Ди-Паскуале (Su un tema di concorso per gli Istituti Tecnici. Di Pasquale Luigi), Period. mat., 1955, **33**, № 3, 140—153 (итал.)

Заметка посвящена решению следующей задачи: декартовы координаты x и y точки P на плоскости определяются как функции вещественного параметра t формулами

$$x = c \cdot \cos t + \lambda \sin t \qquad (1)$$

$$y = \mu \cdot \sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \qquad (2)$$

где λ и μ — действительные параметры, связанные соотношением $\lambda^2 + \mu^2 = b^2$ (3); c и b — действительные положительные константы. Требуется 1) определить вид кривой $C(\lambda)$, заданной формулами (1), (2), (3), в зависимости от λ; 2) найти огибающую семейства $C(\lambda)$; 3) вычислить площадь, ограниченную $C(\lambda)$; 4) изложить метод отыскания огибающей системы плоских кривых. Доказывается: 1) кривые $C(\lambda)$ — эллипсы, составляющие однопараметрическое семейство индекса 2; 2) уравнение огибающей $y^2[b^2x^2 + (b^2 + c^2)y^2 - b^2(b^2 + c^2)] = 0$; 3) площадь, ограниченная $C(\lambda)$, равна $\pi c\sqrt{b^2 - \lambda^2}$. Способы отыскания огибающих иллюстрируются примерами. Г. И. Клейнерман

4285 К. Аналитическая геометрия на плоскости. Потоцкий М. В. М., Учпедгиз, 1956, 447 стр., илл., 9 р. 40 к.

4286 К. Элементи аналитической геометрии. Каннароццо (Elementi di geometria analitica. Cannarozzo Salvatore. Palermo, A. Renna, 1955, 6, 350 p., 840 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 660—663, 183 (итал.)

4287 К. Аналитическая геометрия пространства. Миллер (Analytische Geometrie des Raumes. Miller Maximilian. Leipzig, Teubner, 1956, 91 S., 3.40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 35, 2476 (нем.)

4288 К. Избранные работы (по аналитической геометрии). Андреев К. А., Харьков, Харьковск. ун-т, 1955, 92 стр., илл., 4 р. 75 к.

4289 К. Избранные труды по геометрии. Лобачевский Н. И. Ред. Александров П. С. М., АН СССР, 1956, 595 стр., илл., Работы Н. И. Лобачевского, стр. 594—595. 22 р. 50 к.

4290 К. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов пед. ин-тов. Аргунов Б. И., Балк М. Б. М., Учпедгиз, 1955, 270 стр. 5 р. 50 к.

Книга содержит 8 глав. В гл. I делается попытка обоснования конструктивной геометрии и раскрывается содержание основных понятий. В гл. II—VI излагаются основные методы геометрических построений (геометрические места, параллельный перенос, осевая симметрия, вращение около точки, инверсия, гомотетия и подобие, алгебраический метод). В гл. VII рассматриваются некоторые задачи, не разрешимые циркулем и линейкой, описываются различные способы решения классических задач инструментами, отличными от циркуля и линейки, а также указываются некоторые приемы их приближенного решения. Гл. VIII посвящена геометрическим построениям при различных ограничениях, в частности построениям с недоступными точками. Дается доказательство теоремы Мора-Маскерони и Штейнера.

Книга содержит ряд неточностей, например неверные или неудачные рисунки (6 и 113). Доказательство о невозможности проведения перпендикуляра к данной прямой через данную точку, при помощи только одной линейки (стр. 209), неубедительно, так как при параллельном проектировании углы не сохраняются.

Вызывает недоумение иллюстрация якобы неверного предложения, что центры подобия трех попарно гомотетичных фигур всегда лежат на одной прямой. Н. В. Наумович

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4291. Инвариантная форма обобщенных уравнений Гамильтона. Русак Б. И., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955 вып. 16, 106—112

Ставится вопрос о построении обобщенных канонических уравнений (см. статью референта Тр. Ин-та математ. и механ. АН УзССР, 1949, вып. 7), инвариантных относительно общих непрерывно дифференцируемых преобразований переменных. Дается решение поставленного вопроса путем надлежащего обобщения понятия о движении, рассмотренного П. К. Рашевским (Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., 1947). Выяснена также структура систем дифференциальных уравнений, приводимых к обобщенным каноническим уравнениям. И. С. Аржаных

4292. Движение частицы, вынужденной двигаться с трением по выпуклой кривой. Валентайн (The motion of a particle constrained to move on a rough convex curve. Valentine F. A.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 1, 16—20 (англ.)

Пусть C — плоская выпуклая кривая, имеющая в каждой точке определенную кривизну. Рассматривается движение по инерции точечной массы m с начальной скоростью v_0 по кривой C. Коэффициент трения считается постоянным. Интегрированием уравнения движения устанавливается, что скорость частицы после полного обхода кривой не зависит от формы C. Время обхода при фиксированной кривой C не зависит от выбора начальной точки в том и только том случае, когда C — окружность. Получив еще ряд результатов, автор формулирует экстремальные задачи и вопросы, связанные с переходом к пространственным и нерегулярным кривым, переменному коэффициенту трения и т. п. В. А. Залгаллер

4293. К алгебраическому методу определения элементов плоских шарнирно рычажных передач вращения. I сообщ. Зикер (Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe. I. Mitteilung. Sieker K. H.), Ingr.-Arch., 1956, 24, № 3, 188—215 (нем.)

Если углы поворота валов I и II суть φ и ψ, то шарнирно рычажная передача вращения позволяет реализовать зависимость $\psi = f(\varphi)$, где f — заданная функция только для конечного числа значений φ, и чем сложнее механизм, тем для большего числа точек φ. При помощи шарнирного 4-сторонника, например, можно обеспечить верность функции в 5 точках. Автор рассматривает рычаги механизма как векторы на комплексной плоскости и дает метод вычисления постоянных механизма при помощи комплексных чисел. Формулы простые, но вычисления затруднительны, так как получаются определители довольно высоких порядков. Автор полагает, что электронные машины сделают их выполнимыми. Приведено несколько числовых примеров. Б. Н. Делоне

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4294. Об одном соответствии между двумя плоскостями. Орешина В. М., Сб. студ. науч. работ по естеств.-матем, циклу. Моск. обл. пед. ин-т, 1956, 1, 8—17

Рассматривается квадратичное соответствие между двумя плоскими полями, устанавливаемое с помощью двух корреляций. Доказываются некоторые свойства этого соответствия, как например: кривая k-го порядка преобразуется с помощью квадратичного соответствия, вообще говоря, в кривую $2k$-го порядка. Показано, что инверсию можно рассматривать как квадратичное соответствие, образованное с помощью двух корреляций. Первая корреляция есть полярное соответствие относительно базисной окружности. Вторая корреляция ставит в соответствие каждой точке M прямую, проходящую через точку M', инверсную точке M, относительно базисной окружности и повернутую на угол α в направлении против часовой стрелки от положения поляры m точки M относительно базисной окружности. Рассматривается также соответствие между двумя плоскими полями, установленное с помощью двух коллинеаций.

В. А. Маневич

4295. Коллинеарные преобразования в пространстве в применении к решению позиционных задач. Харит Ю. А., Kauno politechn. inst. darbai, Тр. Каунасск. политехн. ин-та, 1955, 3, 217—234 (рез. лит.)

Коллинеарное преобразование вполне определено заданием пяти пар соответствующих точек исходного и преобразованного пространства. Для применения этого преобразования в начертательной геометрии при решении задач позиционного характера, связанных с нелинейчатыми поверхностями второго порядка, использована гомология. В работе приведены также частные случаи гомологичного преобразования в пространстве: подобие — двойная плоскость удалена в бесконечность; родство — центр удален в бесконечность; параллельный перенос — двойная плоскость и центр удалены в бесконечность. Далее дано преобразование поверхностей второго порядка и решен ряд задач. А. Р. Зенгин

4296. Объединенные, подобные «сечению» действительные представления трех видов общих бинарных комплексных чисел. Такасу (Unified «schnitt»-like real representations of the three kinds ef general binary complex numbers. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math., J., 1954, 11, № 2, 127—136 (англ.)

Показывается, что комплексные числа можно отождествить с двойными элементами проективного соответствия. Рассматривается последовательность $|u_n|$ действительных чисел и последовательность $|u'_n|$, которая образована элементами, соответствующими элементам $|u_n|$ в инволюции или проективном соответствии. Комплексное число определяется «сечением» $(u_1, u_2, \ldots / u'_1, u'_2, \ldots)$ или «сечением» $(u'_1, u'_2 \ldots / u_1, u_2, \ldots)$.

Автор показывает, что два действительных и различных числа можно рассматривать как двойные элементы гиперболического проективного соответствия, два совпавшие комплексные числа — как двойной элемент параболического соответствия, два комплексно сопряженных числа — как двойные элементы эллиптического проективного соответствия. В. А. Маневич

4297. О четырехмерном аналоге теоремы Паскаля. Ивницкий Т. Г., Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1956, 18, 87—95

Доказывается теорема: Если десять ребер какого-нибудь пентастера пересекаются с гиперквадрикой в двадцати точках, четверки этих точек, взятые по одной на каждом из четырех ребер с общей вершиной так, что ни одна точка не входит в две четверки, определяют пять гиперплоскостей. Эти гиперплоскости пересекаются соответственно с гипергранями пентастера, противоположными указанным вершинам, по пяти плоскостям, которые лежат на трехмерном линейчатом многообразии третьего порядка. Эта теорема является аналогом теоремы Паскаля для четырехмерного пространства. Своим доказательством автор хочет показать, что рассуждения Д. Д. Мордухай-Болтовского (РЖМат. 1953, 405) позволяют дать доказательство, свободное от замеченных И. Метелькой неточностей (РЖМат. 1956, 1604).

Примечание референта: Автор называет «пентаэдром» то, что обычно именуется «пентастером».

В. А. Маневич

4298. Гаусс и неевклидова геометрия. Тот (Gauss și geometria neeuclidiana Toth Imre), Gaz. mat. și fiz., 1955, A7, № 8, 447—456 (рум.)

По сохранившимся письмам и документальным данным автор освещает последовательные моменты в создании Гауссом неевклидовой геометрии.

Автор утверждает, что Гаусс решил в основном самые важные вопросы неевклидовой геометрии в период 1819—1824 гг., и отмечает в работе трех создателей неевклидовой геометрии: Гаусса, Бойаи и Лобачевского поразительную параллельность. В период 1829—1831 гг. неевклидова геометрия достигает у всех троих полной зрелости. Н. М. Остиану

4299. Некоторые применения полярных координат в гиперболической геометрии. Билинский (Einige Anwendungen der Polarkoordinaten in der hyperbolischen Geometrie. Bilinski Stanko), Glasnik mat.-fiz., i astron., 1956, 11, № 1, 25—35 (нем.; рез. сербо-хорв.)

В плоскости Лобачевского рассматривается кривая, заданная в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ с дважды дифференцируемой функцией $r(\varphi)$.

Для кривизны $\varkappa$ этой кривой с помощью элементарных рассуждений выводится формула

$$\varkappa = (2\dot{r}^2 \operatorname{ch} r + \operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} r - \ddot{r} \operatorname{sh} r)/(\dot{r}^2 + \operatorname{sh}^2 r)^{3/2}. \quad (1)$$

Она удовлетворяет следующим трем требованиям: а) выражение (1) инвариантно относительно конгруэнтных преобразований плоскости Лобачевского,

б) в предельном случае, когда плоскость Лобачевского переходит в евклидову плоскость, формула (1) переходит в обычную формулу для кривизны в полярных координатах; в) кривизна прямой линии равна нулю; окружности, орициклы и эквидистанты суть кривые постоянной кривизны.

Формула (1) может быть выведена, как указывает автор из общей формулы Кайе (Cailler C., Mém. Soc. phys. et hist. Genève, 1911, 37, 29—90).

И. С. Иохвидов

4300. Использование вспомогательного проектирования в некоторых задачах начертательной геометрии. Бушнев А. А., Дедрлдри Аздрб. политехн. инст., Тр. Азерб. политехн. ин-та, 1956, вып. 2, 16—21 (рез. азерб.)

Рассматривается построение точек пересечения произвольной прямой с поверхностями шара и эллипсоида. Для этого через данную прямую проводят вспомогательную, обычно проектирующую, плоскость, строят сечение заданной поверхности вспомогательной плоскостью, а затем находят точки пересечения полученной линии сечения с данной прямой.

Линия пересечения вспомогательной проектирующей плоскости с поверхностью шара или эллипсоида проектируется на одну плоскость проекции отрезком прямой, а на другую — эллипсом.

Автор показывает, как выбрать направление вспомогательного параллельного проектирования, параллельного плоскости H или V так, чтобы линия сечения вспомогательной плоскости с поверхностью шара или эллипсоида спроектировалась соответственно на плоскости V и H в виде окружности. Н. В. Наумович

4301. Оси эллипса, являющегося тенью окружности на плоскости проекции. Лаувен (De assen van een ellips als slagschaduw van een cirkel op de projectievlakken. Lauwen P.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—1956, 43, № 5, 257—261 (голл.)

Методами начертательной геометрии дается способ построения осей эллипса, являющегося тенью окружности на одной из плоскостей проекции при параллельном освещении. К. С. Сцилард

4302. Замечания о некоторых проблемах перспективы. Мендонса-ди-Албукерки (Observação sobre alguns problemas de perspectiva. Mendonça de Albuquerque Luís), Rev. Fac. cienc. Univ. Coimbra, 1955, 24, 8—11 (порт.)

Автор еще раз рассматривает обычный метод решения метрических задач, чтобы подчеркнуть его удобство. Он проводит построения отдельно для собственной точки зрения (perspectiva rigorosa) и для несобственной (perspectiva cavaleira). Обозначая через O собственную точку зрения, P — ее проекцию на картинную плоскость, M' — проектируемую точку, M — ее коническую, m — ее ортогональную проекцию на картинную плоскость, получаем:

$$M'm = (OP \cdot mM) : PM,$$

что требует умения графически строить произведение и частное отрезков, или применения метода пересечения картинной плоскости, с плоскостью к ней перпендикулярной. Чертеж показывает, как применить последний метод для решения задач: 1) провести вертикальную проектирующую плоскость при фиксированной фронтальной прямой; 2) при закрепленной в вершине плоскости.

Во втором случае, обозначая через k котангенс угла наклона проектирующей плоскости к картинной, имеем: $M'm = k \cdot Mm$. Чертеж дает решения тех же задач и в этом случае.

Этим методом удобно решаются задачи: провести через точку прямую, перпендикулярную данной прямой, 2) прямую, перпендикулярную плоскости, 3) плоскость, перпендикулярную прямой; определить расстояние, 4) между двумя точками, 5) от точки до прямой, 6) между двумя некомпланарными прямыми, 7) между двумя параллельными плоскостями; 8) определить угол между двумя плоскостями, когда они пересекаются по прямой, параллельной картинной плоскости. Р. И. Пименов

4303 К. Упражнения по аналитической и проективной геометрии. Кампеделли (Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva. 6 ed. Campedelli Luigi, Padova, Casa ed dott. A. Milani, 1956, x, 391 p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 660—663, 183 (итал.)

4304 К. Неевклидова геометрия. Кульчицкий (Geometria nieeuklidesowa. Kulczycki Stefan. Warszawa, Pánstw. Wydawn. Nauk., 1956, 188, 2 nlb. s., il., 10.30 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 39, 583 (польск.)

4305 К. Краткий курс начертательной геометрии. Минков (Кратък курс по дескриптивна геометрия. 3. подобр. изд. Минков Н. София, Земиздат, 1956, 308 стр., 11 40. лв.), Българ. книгоп., 1956, 60, № 6, 7 (болг.)

4306 К. Лекции по начертательной геометрии. Ло-Вой (Lezioni di geometria descrittiva con disegno dettate nell'anno 1955—56 nell Univ. Palermo. Lo Voi Antonino. Palermo, S. t., 1956, iv, 308, x p.) Bibliogr. ital., 1956, 90, № 664—665, 284 (итал.)

4307 К. Труды русских и советских ученых по начертательной геометрии и их приоритет в этой науке. Пухальский В. И. Одесск. политехн. ин-т. Одесса, 1956, 9 стр. б. ц.

4308 Д. Применение отображения конических сечений линейной системы третьей ступени в точки трехмерного пространства к решению некоторых задач геометрии. Анисимова Е. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. обл. пед. ин-та, М., 1956

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4309. Об алгебраичности кривых, имеющих «действительный относительный порядок». Сегре (Sur l'algébricité des courbes ayant un ordre relatif réel convenable. Segre Beniamino), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 1, 43—54 (франц.)

Дается новый метод исследования числа точек пересечения алгебраических и неалгебраических кривых с данной алгебраической кривой и в связи с этим исследуется форма данной кривой. Пусть Γ — бесконечное множество точек на проективной плоскости.

Определение: Множество Γ имеет относительный порядок k_n (натуральное число) по отношению к действительным алгебраическим кривым C_n (порядка n), если k_n есть точная верхняя граница числа точек Γ, расположенных на какой-либо C_n, причем C_n не содержит целиком Γ. Очевидно, что $nk_1 \leqslant k_n$. Если $n = pq$ (p и q — целые числа), то $qk_p \leqslant k_n$ и $pk_q \leqslant k_n$. Если $k_n \leqslant n(n+3)/2 - 1$, то существует кривая порядка $\leqslant n$, содержащая в себе Γ. Если $k_n \leqslant pn$, где $n > p(p-1)/2$, тогда Γ лежит на алгебраической кривой порядка $\leqslant p$. Рассматриваются частные случаи: 1) $p = 1$, тогда $k_n \leqslant n$ и в этом случае точки множества Γ расположены на прямой, а поэтому $k_n = n$; 2) $p = 2$, тогда $1 < n < k_n \leqslant 2n$, точки Γ располагаются на нераспадающейся кривой второго порядка, и $k_n = 2n$; 3) $p = 3$, тогда $2n < k_n \leqslant 3n$. Если, кроме того, $n > 3$, то множество Γ располагается на

кривой третьего порядка C_3, которая не распадается, а потому $k_n = 3n$ или $k_n = 3n - 1$. Ставится вопрос, что будет, если в случае 3) $n = 1, 2, 3$. Принципиально различны случаи: $n = 1$, 2 и $n = 3$. В случае $n = 1, 2$ можно построить такое множество Г, что его точки лежат на алгебраической кривой не третьего порядка. Однако $k_n = 3n$, а следовательно, $k_1 = 3$ и $k_2 = 6$. Для случая $n = 3$, если $k_3 \leqslant 8$, то Г расположено на кривой третьего порядка. Остается единственный случай $k_3 = 9$. Он рассматривается лишь для случая, когда Г состоит из одной или нескольких дуг кривых Жордана. При этом всякая кривая Г, для которой относительный порядок есть $k_3 = 9$, состоит из действительных точек алгебраической кривой третьего порядка или является нечетной веткой такой кривой (дополнительной некоторому овалу), или, наконец, может быть образована действительными точками кривой третьего порядка с узлом, за вычетом петли кривой.

Последняя теорема трактуется еще с помощью гиперповерхности и гиперплоскости в девятимерном пространстве. А. С. Кованько

4310. О двух новых плоских конфигурациях (12_4, 16_3). Быджовский (Über zwei neue ebene Konfigurationen (12_4, 16_3). Bydžovský Buhumil), Чехосл. матем. ж., 1954, 4, (79), № 3, 193—218 (нем.; рез. русск.).

Автор исследует конфигурацию (12_4, 16_3) (Zacharias M., Math. Nachr., 1948, 1, вып. 5, 332); это была пятая известная конфигурация этого типа, с тех пор стали известными более 50 других таких конфигураций.

В гл. I реферируемой статьи показывается, что на кубической кривой рода 1 существует всегда такая совокупность 12 точек, что, соединяя их, получаем конфигурацию Захариаса, но одновременно при ином соединении возникает из этих точек известная конфигурация Хессе, и далее, что соответствующая таблица индидентности может быть геометрически воспроизведена проективными прямыми над полем комплексных чисел еще одним, отличным от предыдущих, способом. Таким образом возникает новая конфигурация с той же таблицей инцидентности, как у конфигурации Захариаса, но точки которой ни в коем случае не могут лежать ни на какой кубической кривой. Это первый опубликованный пример конфигурации (12_4,16_3), обладающей описанным свойством, а также первый пример конфигурации, которая не находится ни в какой связи с конфигурацией Хессе.

В гл. II автор изучает геометрические свойства этой новой конфигурации; 9 из 12 точек обладают замечательным свойством: их можно тремя различными способами сгруппировать так, чтобы они образовывали вершины трех взаимно перспективных треугольников, причем все три центра и все три оси перспективы совпадают.

Конфигурация Захариаса и ее вариант, найденный автором, являются также первыми конфигурациями, обладающими следующим свойством: в них найдется по крайней мере одна точка (в новой литературе эту точку называют E-точкой), которая ни одной прямой конфигурации не соединена с какими бы то ни было тремя точками, лежащими на одной конфигурации. Каждая из рассматриваемых здесь конфигураций имеет три E-точки, но в каждой из них лежат и «нечистые» элементы, т. е. прямые и точки, которые не принадлежат конфигурации.

В гл. III автор ищет конфигурацию с тремя E-точками, не содержащую никаких нечистых элементов. При помощи таблицы инцидентности он находит пример такой конфигурации и, кроме того, показывает, что ее можно осуществить двумя способами. Ни в коем случае эта конфигурация не лежит на кубической кривой. J. Metelka

4311. О двух новых конфигурациях (12_4), 16_3). Быджовский (O dvou nových konfiguracích (12_4, 16_3). Bydžovský B.), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 3, 219—228 (чешск.)

Сокращенное изложение содержания статьи автора, написанной на немецком языке (реф. 4310).

4312. Алгебраические многообразия с рациональными рассечениями. Чжоу Вэй-лян (Algebraic varieties with rational dissections. Chow Wei-Liang), Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A., 1956, 42, № 3, 116—119 (англ.)

Пусть V — абстрактное многообразие в смысле Вейля (Weil A., Foundations of algebraic geometry, New York, 1946) и K — поле определения для V. Рассечением многообразия V называется конечная система многообразий $\{W_i\}$, содержащихся в V (хотя, вообще говоря, не являющихся подмногообразиями V), такая, что любая точка V содержится в одном и только одном из этих многообразий. Рассечение называется рациональным, если каждое многообразие W_i бирегулярно эквивалентно аффинному пространству. Элементы рационального рассечения размерности s называют s-ячейками.

Автор следующим образом вводит понятие рациональной эквивалентности на многообразии V. Пусть Z — цикл на V, рациональный относительно поля определения K. Принимается, что Z рационально эквивалентен нулю над K, если существует цикл Z_u на V, рациональный относительно чисто трансцендентного расширения $K(u)$ поля K такой, что как Z, так и нулевой цикл являются его специализациями (РЖМат, 1956, 2408). Рациональной базой s-циклов на V (т. е. циклов размерности s) называется такая их конечная система, что любой s-цикл рационально эквивалентен линейной комбинации ее циклов.

Для многообразия V, обладающего рациональным рассечением, доказывается, что s-ячейки этого рассечения образуют рациональную базу для s-циклов на V.

В частном случае грассмановых многообразий аналогичный вопрос (о построении базы) рассматривался Эресманом (Ehresmann C., Ann. Math., 1934, 35, 396), Ходжем и Пидо (Методы алгебраической геометрии II, М., Изд-во ин. лит. 1954, гл. XIV). И. З. Розенкноп

4313. О вложении неособенного многообразия в неприводимое полное пересечение. Ниси (On the imbedding of a non-singular variety in an irreducible complete intersection. Nishi Mieo), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A29, № 2, 177—187 (англ.)

Доказывается, что каково бы ни было неособенное многообразие V^r размерности r в N-мерном проективном пространстве L^N, для любого n, удовлетворяющего неравенствам $2r \leqslant n \leqslant N$, в L^N найдется неособенное n-мерное многообразие u^n, являющееся полным пересечением и содержащее V^r в качестве подмногообразия. Показывается на примере, что содержащиеся в этом утверждении ограничения для n существенны. А. И. Узков

4314. Первое комплексное представление общей гиперповерхности в S_r над алгеброй срезанных многочленов 4-го ранга. Спампинато (La 1ª rappresentazione complessa della ipersuperficie generale dell'S_r quadripotenziale. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1954, 3, № 2, 172—188 (итал.)

Изучается многообразие V_{4r-1} порядка n в комплексном проективном пространстве $S_{4r+3}(x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, \ldots, t_{r+1})$, представляющее гиперповерхность

пространства $S_r(A)$, координаты точек которого лежат в алгебре A ранга 4 над полем комплексных чисел с таблицей умножения $e_1e_i=e_i\,(i=1,\ldots,4)$, $e_2^2=e_3$, $e_2^3=e_4$, $e_2^4=0$. Уравнения многообразия:

$$(T)\begin{cases}(\mathrm{I}) & f(x)=0,\\ (\mathrm{II}) & D(f(x),\ y)+g(x)=0,\\ (\mathrm{III}) & D(f(x),z)+\frac{1}{2}D^{(2)}(f(x),y)+D(g(x),y)+h(x)=0,\\ (\mathrm{IV}) & D(f)(x),t)+\frac{1}{6}D^{(3)}(f(x),y)+\frac{1}{2}D^{(2)}(g(x),y)+\\ & +D_2(f(x),y,z)+D(h(x),y)+D(g(x),z)+k(x)=0.\end{cases}$$

Здесь f, g, h, k — формы степени n от $r+1$ переменных $x_1,\ldots,x_{r+1}$, причем форма f отлична от нулевой. Приняты обозначения: $\sum_1^{r+1}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}y_i=D(f(x),y)$,

$$\sum_1^{r+1}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}y_iy_j=D^{(2)}(f(x),\ y),\quad \sum_1^{r+1}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}y_iy_jy_s=$$

$$=D^{(3)}f(x),\ y),\quad \sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}y_iz_j=D_2(f(x),\ y,\ z).$$

Если A_1, $A_2,\ldots,A_{4r+4}$ — вершины координатного симплекса в S_{4r+3}, то вершины, индексы которых сравнимы с 0, 1, 2 или 3 (mod 4), определяют r-мерные пространства, которые обозначаются соответственно S_r', S_r'', S_r''' и S_r''''. $(x_2,\ldots,x_{r+1})$ можно принять за координаты в S_r', так как уравнения S_r' суть $y_i=0$, $z_i=0$, $t_i=0$ $(i=1,\ldots,r+1)$. Аналогично (y_i), (z_i) и (t_i) — координаты в S_r'', S_r''' и S_r'''' соответственно.

Доказывается: 1) Пересечение первых двух гиперконусов (I) и (II) системы (T) состоит из ∞^{r-1} образующих S_{3r+2}, проходящих через вершину S''_{2r+1} второго гиперконуса, уравнения которой $x_i=0$; $y_i=0$ $(i=1,\ldots,r+1)$. Параметрические уравнения образующих S_{3r+2} суть:

$$x_i=\lambda x_i',\ y_i=\lambda_i,\ z_i=\mu_i,\ t_i=\eta_i\ (i=1,\ldots,r+1)\quad(1)$$

при условии

$$f(x')=0\quad(2)$$

и

$$D(f(x'),\ \lambda)+\lambda g(x')=0.\quad(3)$$

2) Пересечение $V_{4r}^{n^3}$ первых трех гиперконусов состоит из ∞^{r-1} образующих гиперквадрик V_{3r+1}^2, расположенных в образующих S_{3r+2} пересечения первых двух гиперконусов.

Параметрические уравнения V_{3r+1} суть: (1), (2), (3) и

$$\lambda D(f(x'),\ \mu)+\frac{1}{2}D^{(2)}(f(x'),\ \lambda)+$$

$$+[D(g(x'),\ \lambda)+h(x')\lambda]\lambda=0.\quad(4)$$

Каждая V_{3r+1} проходит через S''_{2r+1}. 3) Пересечение $V_{4r-1}^{n^4}$ гиперконусов (T) состоит из ∞^{r-1} образующих многообразий V_{3r}^6, лежащих в упомянутых S_{3r+2}. Параметрические уравнения V_{3r}^6 суть: (1,) (2), (3), (4) и $\lambda^2D(f(x'),\ \eta)+\frac{1}{6}D^{(3)}(f(x'),\ \lambda)+\frac{\lambda}{2}D^{(2)}(g(x'),\ \lambda)+$ $(+\lambda D_2(f(x'),\ \lambda,\ \mu)+\lambda^2D(h(x'),\ \lambda)+\lambda D^{(2)}(g(x'),\ \mu)+$ $\lambda^3k(x')=0.\quad(5)$

Каждое V_{3r}^6, содержит S''_{2r+1}. 4) Многообразие $V_{4r-1}^{n^4}$ состоит из ∞^{3r-1} образующих S_r, пересекающих S_r'''' по гиперплоскостям S_{r-1}, которые касаются гиперповерхности W, заданной в S_r'''' уравнением $f(t_1,\ldots,t_{r+1})=0$, если образующая S_r определяется точкой $P^*(x_i^*,\ y_i^*,\ z_i^*,\ t_i^*)$ многообразия V_{4r-1}, то соответствующая S_{r-1} касается W в точке с координатами $t_i=x_i^*$.

Так как система (T) является следствием однородного уравнения

$$F(\xi_1,\ldots,\xi_{r+1})=0,\quad(6)$$

где $\xi_i=x_ie_i+y_ie_2+z_ie_3+t_ie_4$, то вместе с решением $\xi_1^*,\ldots,\xi_{r+1}^*$ уравнение имеет решение $\rho\xi_1^*,\ldots,\rho\xi_{r+1}^*$, где ρ — любой элемент алгебры A, не являющийся делителем нуля. Из этого следует, что вместе с точкой $P^*(x_i^*,\ y_i^*,\ z_i^*,\ t_i^*)$ на V_{r-1} лежат точки

$$Q^*(0,\ x_1^*\ y_1^*,\ z_1^*,\ 0,\ x_2^*,\ y_2^*,\ z_2^*,\ 0,\ldots),$$

$$R^*(0,\ 0,\ x_1^*,\ y_1^*,\ 0,\ 0,\ x_2^*,\ y_2^*,\ 0,\ldots),$$

$$T^*(0,\ 0,\ 0,\ x_1^*,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_2^*,\ 0,\ldots),$$

а также все точки пространства, натянутого на точки P^*, Q^*, R^*, T^*. Следовательно, V_{4r-1} составлено с помощью конгруэнции (S_3). Осью конгруэнции является S_r''''.

Доказывается, что образующие S_r^* и S_3^* многообразия V_{4r-1}, определенные точкой P^*, пересекаются по прямой P^*T^*, которая пересекает S_r'''' в точке T^*, описанной в 4) Г. И. Клейнерман

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4315. Конгруэнция фокальных осей цилиндров окружности. Ничe (Die Brennachsenkongruenz der Zylinder eines Kreises. Ničе Vilko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 1, 37—44 (нем.; рез. хорв.)

Данной окружности c ставится в соответствие ∞^2 цилиндров второй степени, из которых только один — круговой, перпендикулярный к плоскости этой окружности. Пусть o — ось этого цилиндра. Каждый цилиндр окружности c имеет две действительные и две комплексно-сопряженные фокальные оси, содержащие фокусы всех ортогональных эллипсоидальных сечений этого цилиндра. Изучается лишь конгруэнция действительных фокальных осей цилиндров окружности c. Она образована прямолинейными образующими ∞^1 однополостных гиперболоидов вращения H с общей осью o. Используя понятие гиперсоприкасающихся цилиндров окружности (Glasnik mat-fiz i astr., 1949, 4, 1—9), автор показывает, что фокусы меридиональных сечений гиперболоидов H лежат на окружности c, а каждый из гиперболоидов H касается

вдоль двух мнимых кругов некоторой поверхности шестой степени, распадающейся на пару изотропных конусов (содержащих окружность c) с мнимо-сопряженными вершинами на оси o и пару изотропных плоскостей с осью o. Доказывается, что изучаемая конгруэнция имеет второй порядок и второй класс.

Все лучи конгруэнции фокальных осей цилиндров, пересекающие фиксированный диаметр окружности c и ему перпендикулярные, являются образующими коноида четвертой степени, содержащего этот диаметр как двойную прямую и образующие которого параллельны направляющей плоскости, перпендикулярной взятому диаметру окружности c. Если вращать коноид вокруг оси o, то во всех новых положениях его образующие будут лучами рассматриваемой конгруэнции. Доказывается, что если коноид четвертой степени, который образован нормалями некоторого кругового цилиндра вдоль какого-либо его плоского сечения, вращать вокруг его двойной образующей, то его образующие во всех новых положениях будут лучами конгруэнции фокальных осей цилиндров окружности, которая при этом вращении описывается точками заострения (Kuspidalpunkt) этого коноида. В. Д. Измайлов

4316. О кривизнах поверхности. Винтнер (On the curvatures of a surface. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1956, 78, № 1, 117—136 (англ.)

Если поверхность S трехмерного евклидова пространства принадлежит к классу C^2 и отнесена к C^2-параметризации $\bar{X} = \bar{X}(u, v)$ $((u, v) \in D)$, то ее средняя кривизна H и полная кривизна K могут быть определены как первый и соответственно второй инварианты тензора второй квадратичной формы. При этом H и K будут только непрерывны и будут иметь место формулы, указанные Вейнгартеном

$$\int_J [\bar{N} d\bar{x}] = \iint_B - 2Hg\bar{N}\, dudv \qquad (1)$$

и

$$\int_J [\bar{N} d\bar{N}] = \iint_B - 2Kg\bar{N} dudv, \qquad (2)$$

где J — любая положительно ориентированная кусочно-гладкая жорданова кривая, содержащаяся вместе со своей внутренностью $B = B(J)$ в области D. Указывается, что формулы (1), (2) сохраняют силу также для любой C^1-параметризации S и что их можно рассматривать, как новое определение кривизн H и K. Показывается, что это новое определение средней кривизны H является более общим, чем классическое, т. е., что существуют поверхности, принадлежащие классу C^1, для которых классическое определение H не имеет смысла, и, в то же время, существует непрерывная средняя кривизна в смысле нового определения. Новое определение средней кривизны имеет еще и то преимущество перед классическим, что им можно пользоваться для ее вычисления на поверхности, принадлежащей к классу C^2, но отнесенной к C^1-параметризации, которая естественно возникает вместе с поверхностью. С такими случаями встречаются, например, при нахождении огибающих семейства нормальных и спрямляющих плоскостей пространственной кривой. Указывается несколько задач, возникающих в связи с новым определением H.

Относительно решения проблемы вмещения Вейля (см., например, РЖМат, 1955, 2384) указывается, что на поверхность, реализующую заданную метрику ds^2, нельзя, вообще говоря, накладывать требования гладкости. Это следует из того, что существуют метрики, определенные и непрерывные в круге $D_c: u^2 + v^2 < c$, коэффициенты E, F, G которых принадлежат к классу C^2 на D_c с выброшенным центром и кривизна которых $K \to \infty$ при $u^2 + v^2 \to 0$, такие, которые не допускают выпуклого C^1-вмещения. Указывается также на ошибочность одной теоремы Вейля о существовании выпуклого замкнутого C^2-смещения.

Ю. Е. Пензов

4317. Главные соприкасающиеся кривые и поверхности. Спампинато (Curve e superficie osculatrici principali, a contatto tripunto o quadripunto, ad una falda di S_3 con l'origine in un punto o in una curva. Spampinato Nicolò), Giorn. mat. Battaglini 1955, 83, № 1, 41—53 (итал.)

Если

$$x_i = c_{i1} + c_{i2}p + c_{i3}p^2, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

— параметрическое уравнение кривой 2-го порядка на проективной плоскости S_2, то точки $C_1(c_{j1})$, $C_3(c_{j3})$ принадлежат кривой, $C_2(c_{j2})$ — точка пересечения касательных в точках C_1 и C_3, а $C(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3})$ — также точка кривой, C_i — автополярный треугольник 2-го рода. Если этот треугольник принять за координатный, а точку C за единичную точку, то уравнение кривой примет вид

$$x_1 = 1, \; x_2 = p, \; x_3 = p^2.$$

Для любой плоской кривой

$$x_i = c_{i1} + c_{i2}p + c_{i3}p^2 + c_{i4}p^3$$

кривая (1) будет соприкасающейся 3-го порядка (главная соприкасающаяся кривая 2-го порядка в точке C_1).

Аналогично, если

$$x_i = c_{i1} + c_{i2}p + c_{i3}p^2 + c_{i4}p^3 \qquad (2)$$

— параметрическое уравнение кубической кривой в проективном пространстве S_3, то точки $C_1(c_{j1})$, $C_4(c_{j4})$ принадлежат кривой, $C_2(c_{j2})$ является точкой пересечения касательной в точке C_1 кривой с прямой пересечения соприкасающихся плоскостей в точках C_1 и C_4; C_3 — точка пересечения касательной в точке C_4 с этой же прямой; точка $C(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4})$ также принадлежит кривой. Из точек C_4 и C_1 кривая проектируется на соприкасающиеся плоскости $C_1C_2C_3$ и $C_4C_2C_3$ соответственно в кривые 2-го порядка, соприкасающиеся 3-го порядка.

Если

$$x_i = c_{i1} + c_{i2}p + c_{i3}p^2 + \ldots + c_{in}p^{n-1} \ldots$$

— уравнение произвольной пространственной кривой, то кривая (2) имеет с ней касание 4-го порядка (главная соприкасающаяся в точке C_1).

М. В. Васильева

4318. О геометрической интерпретации проективной кривизны вещественной плоской кривой. Анкоче а (Sobre la interpretación geométrica de la curvatura proyectiva de una curva plana real. Ancochea Germán), Abhandl. Math. Seminar Univ., Hamburg., 1955, 20, № 1—2, 52—56 (исп.)

Пусть A — исследуемая точка кривой. При определенном выборе координатного треугольника AA_1A_2 и единичной точки U уравнение кривой имеет вид $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + a_8x^8 + \ldots$ и формулы Френе дают:

$$dA/ds = A_1, \quad dA_1/ds = kA + A_2, \quad dA_2/ds = A + kA_1$$

(k — проективная кривизна в точке A). Отсюда возможно k выразить при помощи двойных отношений:

$$k = \lim_{ds \to 0} \frac{(A_2,\ U,\ U - A_2,\ U + dU)}{A_2(A,\ A_1,\ A + dA,\ U)} =$$

$$= A_1(A,\ A_2,\ U,\ A_1 + dA_1).$$

Г. К. Энгелис

4319. О касательной плоскости к поверхности. Чинкуини (Sopra il piano tangente a una superficie. Cinquini Silvio), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 3, 400—412 (итал.)

Автор на примерах иллюстрирует трудности определения понятия касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$, когда функция $f(x, y)$ не предполагается дифференцируемой (но непрерывной), рассматривая определение Сакса (Saks S., Ann. Math., 1933, 34, 114—124) и Тонелли (Tonelli L., Lezioni di Analisi matematica, Pisa, 1940, vol, II, cap. 6, 83). Затем вводится новое, более общее по сравнению с указанными, определение касательной плоскости к поверхности и доказываются некоторые ее свойства.

Н. С. Синюков

4320. Геометрическое безинтегральное построение асимптотических линий линейчатых поверхностей. Барнер (Geometrische, intergralfreie Konstruktion der Asymptotenlinien der Regelflächen. Barner Martin), Arch. Math., 1956, **7**, № 3, 204—213 (нем.)

Под безинтегральным построением автор понимает указание последовательных шагов, дающих искомый геометрический объект и сводящихся только к процессу дифференцирования или к алгебраическим операциям. Решается задача: к произвольно заданной кривой безинтегральным способом построить вторую кривую так, чтобы обе кривые оказались асимптотическими линиями определяемой ими линейчатой поверхности (тем самым могут быть построены все криволинейные асимптотические линии этой поверхности). Задача эта прежде была решена Кёнигсом (Koenigs, C. r. Acad. sci., 1888, 56). Автор дает новое, основанное на проективно кинематических соображениях решение этой задачи. Эти же соображения позволяют дать безинтегральное представление для ряда других геометрических образов.

Н. И. Кованцов

4321. Некоторое обобщение соотношения Родрига. Михэйляну (O extindere a relaţiei Rodrigues. Mihăileanu N. N.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 7, 313—314 (рум.; рез. русс., франц.)

Формулы Родрига обобщаются на случай поверхности проективного пространства. Абсолют пространства — квадрика. Если M — текущая точка поверхности, N — полюс касательной плоскости в точке M, d и δ — символы дифференцирования, соответствующие направлениям, сопряженным относительно абсолюта, то направление dN смещения точки N, соответствующего смещению dM по поверхности, сопряжено относительно абсолюта направлению δM.

Н. М. Остиану

4322. Проективные изгибания некоторых поверхностей с сопряженной сетью. Швец (Déformations projectives de certaines surfaces à réseau conjugué. Švec Alois), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 4, 559—572 (франц.; рез. русск.)

Автор называет поверхностью F в S_5 такую поверхность, которая удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$x_{uv} = \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v.$$

При этом он рассматривает только те поверхности F, у которых третьи соприкасающиеся пространства двух кривых сопряженной сети в точке x пересекаются по прямой, не принадлежащей соприкасающемуся подпространству в этой точке (псевдонормаль). Поверхность F, у которой оба первые преобразования Лапласа вырождаются в линии, называется поверхностью F_0. Поверхность F_0, у которой псевдонормали вдоль линий сопряженной сети образуют конусы, называется поверхностью F_1. Она определяется вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений:

$$x_{uv} = 0,\quad x_{vvv} = ax + bx_u + cx_v + dx_{uu} + ex_{vv} +$$

$$+ fx_{uuu},\quad f \neq 0,$$

Автор называет u-точкой вершину конуса псевдонормалей вдоль линии $u\,(v = \text{const})$, u-лапласовой точкой — вершину конуса касательных к линиям v в точках одной линии u. u-точки всех линий u образуют линию γ. Любой линии u соответствует u-точка $X = X(v)$ и u-лапласова точка $x_v = x_v(v)$. Поверхность F_1, у которой для каждого $v = v_0$ касательная к кривой $X = X(v)$ в точке $X(v_0)$ проходит через u-точку Лапласа $x_v(v_0)$ (аналогично для каждой v-кривой), называется поверхностью F_2. Каждая поверхность F_2 является решением вполне интегрируемой системы

$$x_{uv} = 0,\quad x_{vvv} = V_1 x + U_1 V_1 x_u + V_2 x_v + U_2 V_1 x_{uu} +$$

$$+ V_3 x_{vv} + U_3 V_1 x_{uuu},\quad U_3 V_1 \neq 0,\ \text{где}\ V_i = V_i(v),$$

$$U_i = U_i(u).$$

Поверхности F_2 существуют с произволом шести функций одного аргумента. Поверхность F_2 допускает проективное изгибание третьего порядка (C_3 или C_{23}). Изгибания поверхности F_2 определяются системой

$$x_{uv} = 0,\quad x_{vvv} = kV_1 x + U_1 V_1 x_u + V_2 x_v + U_2 V_1 x_{uu} +$$

$$+ V_3 x_{vv} + U_3 V_1 x_{uuu},\quad U_3 V_1 \neq 0,\quad k = \text{const},$$

где $k \neq 0$ — параметр изгибания (произвольное действительное число).

В. И. Близникас

4323. О слабом проективном изгибании слоя квадрик. Ваона (Sulla deformazione proiettiva debole di uno strato di quadriche. Vaona Guido), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 3, 337—348 (итал.)

Э. Чех предложил следующую проблему: Точечное соответствие T между двумя проективными пространствами S_3, $\bar{S}_3$ называется слабым проективным изгибанием слоя $\sum$ поверхностей в S_3 в слой $\overline{\sum}$ поверхностей в $\bar{S}_3$, если при этом соответствии сопоставленные друг другу поверхности являются проективным изгибанием одна другой и касательные плоскости к поверхности слоев $\sum$, $\overline{\sum}$ являются характеристическими, т. е. содержат по крайней мере три характеристических направления; задача состоит в изучении таких соответствий.

Ваона разрешил эту проблему в случае слабой изгибаемости квадрик. Он обнаружил, что слои слабо изгибаемых квадрик зависят от четырех функций одного переменного; он дал также геометрическое описание этих слоев. Если заданы два слоя слабо изгибаемых квадрик, то существуют преобразования (зависящие от четырех функций одного переменного), осуществляющие слабое изгибание одного слоя в другой.

A. Švec

4324. **Проективное изгибание двух точечных соответствий. Вилла, Мураккини** (L'applicabilità proiettiva die due trasformazioni puntuali. Villa M., Muracchini L.), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 3, 313—327 (итал.)

Если задано точечное соответствие T между плоскостями π_1, π_2 и точечное соответствие T' между плоскостями π_1', π_2', то соответствие между T и T' (сложенное из соответствия U_1 между π_1 и π_1' и индуцированного соответствия U_2 между π_2 и π_2') называется проективным изгибанием при условии, что 3-слои характеристических линий соответствий U_1, U_2, соответственно T, T', совпадают во всех четырех плоскостях π, π'. Авторы вводят понятие линейного проективного элемента соответствия, причем оказывается, что для того, чтобы два соответствия находились в проективном изгибании, необходимо и достаточно, чтобы они имели один и тот же проективный элемент. A. Švec

4325. **О параллельном перенесении винтов и дуальных векторов. Цыпкин М. Е.**, Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1956, **1**, 233—238

Сопоставляется параллельное перенесение винта по линейчатой поверхности (Цыпкин М. Е., Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1952, **112**, № 10, 77—99) с параллельным перенесением дуального вектора вдоль кривой на дуальной сфере (Норден А. П., Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1950, **110**, № 3, 95—102) и получаются, в терминах перенесения по кривой, необходимые и достаточные условия возможности параллельного пересечения специального винта направления a по поверхности $x = x(\sigma)$. С. Г. Кислицын

4326. **Неголономные многообразия типа Цицейки — Вильчинского. Михэйлеску** (Varietăți neolonome de tip Ţiţeica-Wilczinski. Mihăilescu Tiberiu), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A7**, № 2, 65—66 (рум.)

Вильчинским была поставлена задача отыскания поверхностей, у которых директрисы линейных конгруэнций соприкасающихся комплексов обладают неопределенными фокальными кривыми. В качестве решения он нашел аффинные сферы, встречающиеся в работах Цицейки.

Рассматривая тройные конгруэнции, образованные проективными нормалями неголономного многообразия V_3^2 и прямыми, соответствующими им в поляритете Пантази-Бомпиани, автор решает задачу Вильчинского для V_3^2, у которых фокальные кривые этих конгруэнций не совпадают. При этом получена следующая классификация V_3^2: а) V_3^2 с неопределенными фокальными кривыми конгруэнций первого рода. Все проективные нормали проходят через фиксированную точку (неголономные проективные сферы); б) V_3^2 с неопределенными фокальными кривыми конгруэнций второго рода. Поляры проективных нормалей лежат в фиксированной плоскости; в) V_3, у которых фокальные кривые обеих конгруэнций неопределенные.

Произвол существования поверхностей первых двух классов — 4 функции двух аргументов; произвол поверхностей третьего класса — 4 функции одного аргумента. Н. М. Остиану

4327. **К. Курс дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. Добреску** (Curs de geometrie diferenţiala. Dobrescu Andrei. Univ. «C. I. Parhon», Bucureşti, 1956, Vol. 1. Curbe plane. Curbe strîmbe. 1955—1956. 148 p., il. — Litogr. Vol. 2. Suparafeţe, 1955—1956, 150 p., il. — Litogr.), (рум.) Bul. bibliogr., 1956, A, № 18, 679

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4328. **Корреляции и антикорреляции в аффинной плоскости. Таниока** (On the correlations and anti-correlations in the affine plane. Tanioka Genjiro), 山口大學理學會誌, Ямагути дайгаку ригаккайси, Yamaguchi J. Sci., 1955, **6**, 86—94 (англ.)

В вещественной аффинной плоскости корреляционное соответствие $R(F)$ с центром F определяется как взаимно однозначное соответствие точек и прямых, удовлетворяющее трем условиям: 1) произвольной собственной фиксированной точке F соответствует несобственная прямая, 2) собственной точке, отличной от F, прямая, не проходящая через F и 3) несобственной точке — прямая, проходящая через F. Даются уравнения общей аффинной корреляции $R(F)$ с центром F в однородных координатах x_i и u_i.

Точки, инцидентные с соответствующими прямыми, принадлежат кривой второго порядка Ω, а прямые огибают кривую второго порядка Φ, причем обе кривые являются концентрическими.

Корреляция $R(F)$ в общем случае не является поляритетом ни относительно Ω, ни относительно Φ. При специальных значениях коэффициентов в формулах преобразования $R(F)$ может стать либо аффинным поляритетом (причем $\Omega \equiv \Phi$ и Ω является центральной кривой), либо Ω есть парабола, имеющая с Φ общую несобственную точку.

Аналогичные преобразования рассматриваются в комплексной плоскости C_2 и им дается вещественное истолкование в четырехмерном аффинном пространстве A_4, при этом прямым плоскости C_2 соответствуют двумерные плоскости L в A_4. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками и плоскостями L в A_4. Точкам кривой Ω в C_2 соответствует в A_4 поверхность, по которой пересекаются две гиперквадрики Ω_1 и Ω_2. Аналогичным образом кривой Φ соответствует поверхность, по которой пересекаются Φ_1 и Φ_2. Между этими двумя поверхностями устанавливается связь посредством плоскостей L, проходящих через точки одной поверхности и касающихся другой.

Антикорреляция в C_2 определяется также, как корреляция, однако в уравнениях преобразования координаты точек (прямых) и коэффициенты заменяются сопряженными числами. Всем образам дается истолкование в вещественном A_4.

Левая часть уравнения кривой Ω не является вообще эрмитовой формой. Даны необходимые и достаточные условия, при которых эта форма становится эрмитовой и антикорреляция превращается в антиаффинный поляритет. З. А. Скопец

4329. **Конфигурационная теорема об инцидентности и ортогональности. Шютте** (Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Schütte Kurt), Math. Ann., 1955, **129**, № 5, 424—430 (нем.)

Аффино-метрическая плоскость π определяется в работе как абстрактная аффинная плоскость, удовлетворяющая аксиомам перпендикулярности. Если «вектор» есть упорядоченная пара точек O, B, где O — фиксированная точка (начало), то сумма векторов определяется обыкновенным способом, а скалярное произведение векторов определено так, чтобы выполнялись условия: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ эквивалентно уравнению $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$; из $\mathbf{x} - \mathbf{y} \perp \mathbf{z}$ следует $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$; из $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} - \mathbf{y}$ следует $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$.

Конфигурационная теорема (к. т.) S формулируется следующим образом: Если P_0^j, P_1^j, P_2^j, P_3^j ($j = 1,2$) суть различные точки и если обозначить $g_i^j = P_0^j P_i^j$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$); $h_1^j = P_2^j P_3^j$, $h_2^j =$

$= P_1^j P_3^j$, $h_3^j = P_1^j P_2^j$ $(j = 1, 2)$, то из справедливости любых пяти из соотношений $g_i^1 \perp h_i^2$, $g_i^2 \perp h_i^1 (i = 1, 2, 3)$ следует справедливость шестого.

Если в π имеет место к. т. S, то в π справедлива и аффинная теорема Дезарга; следовательно, в плоскости π можно ввести координаты, которые являются элементами некоторого ассоциативного поля. Используя к. т. S, автор вводит скалярное произведение двух векторов. Основным результатом работы является следующая теорема: В плоскости π к. т. S эквивалентна существованию метрической основной формы. Метрическая основная форма $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ характеризуется здесь следующими свойствами: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, эквивалентно соотношению $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$; $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ линейна в $\mathbf{y}$, т. е. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}\lambda) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \lambda$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$; всегда или $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или же $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y})^I$, где I — или тождественное отображение или инволюция (т. е. отображение поля координат, которое имеет следующие свойства: $(\xi + \eta)^I = \xi^I + \eta^I$, $(\xi\eta)^I = \eta^I \xi^I$, $\xi^{II} = \xi$).

Если в к. т. S заменим перпендикулярность параллельностью, то соответствующую теорему будем называть к. т. S'. к. т. S' в плоскости π эквивалентна аффинной теореме Паппа. (Однако к. т. S и теорема Паппа не будут эквивалентными.)

Под аффинно-метрическим пространством π конечной размерности подразумевается абстрактное аффинное пространство, выполняющее аксиомы перпендикулярности прямых к гиперплоскостям. В статье доказывается, что в пространстве π размерности по крайней мере 3 всегда справедлива к. т. S. В заключение автор доказывает, опираясь на предыдущие рассуждения, теорему Ленца, которая утверждает, что пространство π размерности по крайней мере 3 имеет основную метрическую форму (РЖМат, 1957, 3427). V. Havel

4330. Угловая метрика на аффинно-ортогональной плоскости. Шютте (Die Winkelmetrik in der affin-orthogonalen Ebene. Schütte Kurt), Math. Ann., 1955, **130**, 183—195 (нем.)

Статья является продолжением статьи автора (реф. 4329). Предметом исследования является аффинная плоскость, в которой установлено понятие ортогональности. Ставится требование, чтобы любой угол определялся однозначно отношением сторон прямоугольного тругольника. На основе этого строится некоторая геометрия. Устанавливается группа движений, основанная на существовании симметрии в отношении любой прямой. А. С. Кованько

4331. О проективном понимании поверхностей движения. Гавел (O projektivním pojetí translačních ploch. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 3, 331—336 (нем.; рез. русск., англ.)

Пусть в n-мерном проективном пространстве P_n над телом T характеристики $\neq 2$ выбраны множества $k^i (i = 1, 2)$ и точка $K \in k^1 \cap k^2$. Пусть, далее, σ и ρ — гиперплоскости, не пересекающиеся с $k^1 \cup k^2$. Если $X \in k^2$ и $K \neq X$, то обозначим через k_X^1 образ множества k^1 при коллинеации, переводящей K в X, которая оставляет на месте все точки из σ и все прямые, проходящие через $KX \cap \rho$. Кроме того, положим $k_K^1 = k^1$. Множество $\mathbf{U}_{X \in k^2} k_X^1$ называется поверхностью движения.

Пусть теперь выбраны множества $l^i \in P_n$ и гиперплоскость σ, не имеющая общих точек с $l^1 \cup l^2$. Если $L^i \in l^i$, то положим $X_{L^1L^2} = L^1$ при $L^1 = L^2$. Если же $L^1 \neq L^2$, то через $X_{L^1L^2}$ обозначается точка, удовлетворяющая соотношению $\{I^1 L^2 \cap \sigma, X_{L^1L^2}, L^1, L^2\} = -1$. Множество $\mathbf{U}_{L^i \in l^i} X_{L^1L^2}$ называется средней поверхностью.

Утверждается, что всякая поверхность движения совпадает с некоторой средней поверхностью. Если T — поле действительных чисел и не имеет места $l^i \in p^i$, где p^i — прямые, для которых $p^1 \cap p^2 \in \sigma$, то верно и обратное. Доказательство обоих утверждений дается только для случая $\sigma = \rho$. Л. А. Скорняков

4332. Формулы, соответствующие формулам Френе. Каул (Formulae corresponding to Frenet's formulae. Kaul R. N.), Bull cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 12, 1292—1304 (англ.)

В $(n+1)$-мерном римановом пространстве рассматривается кривая, принадлежащая n-мерной гиперповерхности. Последовательно дифференцируя по длине дуги кривой единичный вектор перпендикулярный к поверхности, автор строит сопровождающий репер кривой и для производных от его ортов получает известные формулы Френе. Далее в работе рассматриваются вторые производные от ортов и различные условия их ортогональности к самим ортам. Специально рассматриваются вторые производные от нормали к поверхности и касательной к кривой. Л. Р. Волевич

4333. О дифференциальной геометрии и однородных пространствах. I. Костант (On differential geometry and homogeneous spaces. I. Kostant Bertram), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956. **42**, № 5, 258—261 (англ.)

Пусть G — связная компактная группа Ли, K — ее компактная подгруппа, $M = G/K$ — пространство левых классов смежности. Тогда в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G существуют подпространства $\mathfrak{p}$, дополнительные к подалгебре $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, которая отвечает подгруппе K, и инвариантные относительно преобразований $adu\,(u \in K)$ присоединенного представления группы K в $\mathfrak{g}$. Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с касательным пространством V_0 к многообразию M в точке o, отвечающей классу смежности K. Разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ автор сопоставляет некоторую инвариантную аффинную связность на многообразии M (РЖМат, 1956, 7605). Пусть P — проекция пространства $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{p}$ параллельно $\mathfrak{k}$. Рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{r}_0$ линейных преобразований пространства $\mathfrak{p} = V_0$, порожденная преобразованиями вида $PadXP\,(X \in \mathfrak{g})$. Для того чтобы вышеуказанная аффинная связность порождалась некоторой римановой метрикой на M (необходимо инвариантной относительно G), необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathfrak{r}_0$ была компактной. В этом случае автор называет $\mathfrak{p}$ естественным дополнением, а связность — естественной связностью. Оказывается, что алгебра Ли группы голономии естественной связности в точке o совпадает с алгеброй $\mathfrak{r}_0$. Тем самым определяется связная компонента единицы $H_0 = \exp \mathfrak{r}_0$ в группе голономии. Полная однородная группа голономии имеет вид $adK \cdot H_0$, где adK — группа линейных преобразований пространства $\mathfrak{p}$, индуцированных преобразованиями $adu\ (u \in K)$. Попутно автор показывает, что если некоторая геодезическая пространства M имеет точку самопересечения, то в этой точке касательные векторы к разным ветвям кривой совпадают. Отмечаются также следующие свойства естественной связности. Если тензорное поле T на M имеет нулевую ковариантную производную, то оно инвариантно. Если поле инвариантно, то оно имеет нулевую ковариантную производную тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{p}$ $(PadXP)\,T_0 = 0$, где T_0 — значение поля T в точке o. А. Л. Онищик

4334. О дифференциальной геометрии и однородных пространствах. II. Костант (On differential geometry and homogeneous spaces. II. Kostant

Bertram), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 6, 354—357 (англ.)

Автор пользуется обозначениями своей предыдущей работы (реф. 4333). Предполагается, что подалгебра $\mathfrak{k}$ не содержит никакого идеала алгебры $\mathfrak{g}$. Рассматриваются дополнения $\mathfrak{p}$ к подалгебре $\mathfrak{k}$, обладающие следующими свойствами: 1) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$; 2) на $\mathfrak{p}$ существует положительно определенная симметрическая билинейная форма B, относительно которой все преобразования $PadXP$ ($X \subseteq \mathfrak{g}$) являются кососимметрическими. Отмечается, что из результатов реферируемой работы вытекает, что эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы дополнение $\mathfrak{p}$ было естественным.

Исследуется вопрос о продолжаемости формы B в инвариантную форму на всей алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(\mathfrak{p})$. Доказывается, что существует одна и только одна инвариантная симметрическая билинейная форма B^* на $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$, продолжающая форму B и такая, что $B^*(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}) = 0$. Форма B^* является невырожденной. Указывается конструкция идеала $\mathfrak{n}$, дополнительного к идеалу $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$.

В последней части работы автор предполагает, что дополнение $\mathfrak{p}$ естественно и таково, что $\mathfrak{g}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{g}$. Рассматривая на многообразии M естественную связность, он исследует вопросы приводимости этого многообразия. Отметим следующий результат, обобщающий теорему Э. Картана о симметрических пространствах. Если $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$ есть разложение пространства $\mathfrak{p}$ в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно группы голономии, то $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_i + [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$ суть идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{k} = \sum_{i=1}^{m} (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i)$. Отсюда следует, что если G односвязна, то все сомножители в разложении де Рама пространства M являются однородными пространствами.

А. Л. Онищик

4335. **Неевклидовы геометрии над алгебрами альтернионов. Джавадов М. А.,** Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, 115, № 10, 8—9

Кратко излагаются работы автора и его учеников о проективных и аффинных пространствах над алгебрами альтернионов и линейных конгруэнциях в проективных пространствах над альтернионами (РЖМат, 1956, 1661 и 4071). Указывается, что аналогично можно определить неевклидовы пространства над альтернионами и доказать аналогичные теоремы о паратактических конгруэнциях в этих пространствах. Геометрия проективной прямой над альтернионами применяется к геометрическому истолкованию спинорных представлений групп движений вещественных неевклидовых пространств (см. работу автора в Докл. АН СССР, 1952, 86, № 4, 653—656).

Б. А. Розенфельд

4336. **Пространства аффинной связности с угловой метрикой. Мурджеску** (Spații cu conexiune afină, cu metrică unghiulară. Murgescu Viorel), Studii și cercetări științ. Acad. RPR, Fil Iași, 1955, Ser. 1, 6, № 1—2, 185—199 (рум.; рез. русск., франц.)

Пространство афинной связности называется пространством с угловой метрикой, если существует функция $\Omega(x^i, \lambda^i, \mu^i)$, зависящая от точки $M(x^i)$ и от двух направлений (λ^i), (μ^i), исходящих из этой точки, которая умножается на функцию φ от координат x^i при параллельном перенесении векторов λ^i, μ^i вдоль инфинитезимального цикла.

В работе показывается, что двумерное пространство с угловой метрикой характеризуется одним (любым) из следующих свойств: 1) является пространством абсолютного параллелизма, 2) допускает по крайней мере одно поле параллельных направлений, 3) тензор кривизны пространства удовлетворяет некоторым линейным уравнениям. Во всех этих случаях определяется функция Ω.

C. Teleman

4337. **Задача о внутренней нормализации гиперповерхности пространства аффинной связности. Измайлов В. Д.,** Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 906—909

Пусть $\xi^i = \xi^i(u^\alpha)$ $(i, j, k = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, \ldots, n-1)$ — гиперповерхность в n-мерном пространстве аффинной связности L_n и $B^i_\alpha = \partial_\alpha \xi^i$. Уравнения $B^i_\alpha m_i = 0$ однозначно определяют псевдовектор m_i в L_n и псевдотензор $\omega_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha B^i_\beta + \Gamma^i_{(jk)} B^j_\alpha B^k_\beta) m_i$ на гиперповерхности. Предположим: (A) $\det(\omega_{\alpha\beta}) \neq 0$. Обозначая через D_α символ смешанного ковариантного дифференцирования относительно связности пространства L_n и скобок Кристоффеля, составленных из $\omega_{\alpha\beta}$, автор вводит вектор $\mathfrak{n}^i = \frac{1}{n-1} \omega^{\alpha\beta} D_\alpha B^i_\beta$ в L_n и величины $\mu_\alpha = m_i D_\alpha \mathfrak{n}^i$. При $n = 3$ вектор $\mathfrak{n}^i$ дает инвариантное (внутреннее) оснащение гиперповерхности. При $n > 3$ рассматриваются отдельно случаи: 1) $\mu_{\alpha\beta} \equiv \partial_{[\alpha} \mu_{\beta]} = 0$. Существует инвариантно определяемое оснащение, для которого $\mu_\alpha = 0$. Вектор этого оснащения определяется с точностью до постоянного множителя. 2) $\mu_{\alpha\beta} \neq 0$. В этом случае дополнительно предполагается, что $\psi \equiv \omega^{\alpha\gamma} \omega^{\beta\lambda} \mu_{\alpha\beta} \mu_{\gamma\lambda} \neq 0$. Существует инвариантно определяемый оснащающий вектор, для которого $\psi = 1$. В заключение рассмотрена гиперповерхность в пространстве эквиаффинной связности.

Примечание референта. Без всяких дополнительных предположений, кроме (A), инвариантное оснащение гиперповерхности в L_n может быть определено также псевдовектором

$$\mathfrak{N}^i = \mathfrak{n}^i + \frac{n-3}{n+1} \omega^{\alpha\beta} \mu_\alpha B^i_\beta.$$

А. Е. Либер

4338. **О некоторых инвариантах в пространствах аффинной связности. Хаймович** (Asupra unor invarianți în spații cu conexiune afină. Haimovici Adolf), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1955, 7, № 3, 595—622 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются пространства, в которых существует функция $f(x^i, X, Y)$, зависящая от точки пространства и двух направлений, исходящих из этой точки инвариантная относительно параллельных переносов. Получается система линейных уравнений в частных производных, которая интегрируется в некоторых частных случаях, а именно, если предполагать, что существует линейная зависимость между некоторыми уравнениями системы независимо от выбора векторов X и Y. Получаются пространства с одним, двумя или тремя независимыми инвариантами $f(x^i, X, Y)$.

C. Teleman

4339. **Исправления к статье «Пространства со связностью в целом. I.». Такасу** (Connection spaces in the large. Correction to part I. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math., J., 1954, 2, № 1, 94 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 1765.

4340. **К изучению векторной алгебры четырехмерного пространства-времени Минковского. Гарай** (Príspevok ku výstavbe vektorovej algebry v Minkowského štvorrozmernom časopriestore. Garaj Jozef), Mat.-fys., časop., 1955, 5, № 1, 22—38 (словац.; рез. русск.)

Автор опирается на то обстоятельство, что в четырехмерном пространстве так же, как в трехмерном, антисимметричным тензорным величинам можно поставить в соответствие другие величины. В евклидовом пространстве в качестве двойственной величины антисимметричному 4-валентному тензору соответствует скаляр. Определением

$$a * b = ba - ab$$

вводится понятие антисимметричного произведения двух векторов. Двойственность между величинами $a*b$ и $a \times b$ в трехмерном пространстве обобщается и на четырехмерное пространство при помощи определения

$$a_1 \times a_2 = -(1/2)\,(a_1 * a_2) : (e^{pqrs} i_p i^q i_r i_s),$$

где

$$\mathrm{k} = e^{pqrs} i_p i^q i_r i_s$$

есть так называемая антисимметричная единица. Доказывается, что эта единица является инвариантом. Тензор $a \times b$, названный автором дополнительным произведением векторов a, b, рассматривается в четырехмерном пространстве-времени Минковского. Доказано, что двойственная величина к данной может быть построена, если перемножить скалярно данную величину и антисимметричную тензорную единицу (3- или 4-валентную, смотря по тому, какова размерность пространства) столько раз, какова валентность данной величины. Доказываются некоторые соотношения, вытекающие из приведенных определений. I. Náter

4341. О применении мнимых координат в геометрии четырехмерного пространства-времени Минковского. Гарай (O používaní imaginárnych súradníc y geometrii Minkowskeho stvorrozmerného casopriestoru. Garaj Josef), Mat.-fiz., časop., 1955, 5, № 2, 114—123 (словац.; рез. русск.)

Автор показывает, что отношения, выведенные в его работе (реф. 4340), становятся более наглядными и симметричными и доказательства проводятся гораздо проще, если вместо ортогональных единичных векторов i_1, i_2, i_3, i_4, обладающих свойством

$$i_1 i_1 = i_2 i_2 = i_3 i_3 = 1,\ i_4 i_4 = -1,$$

ввести новые ортогональные векторы $j_1 = i_1, j_2 = i_2, j_3 = i_3, j_4 = i_4^*$, причем $i_4 = i i_4^*$, где i — мнимая единица, так что

$$j_1 j_1 = j_2 j_2 = j_3 j_3 = j_4 j_4 = 1$$

I. Náter

4342. Кривизна единичной поверхности в пространстве Минковского и геометрическое истолкование одного из тензоров кривизны финслерова пространства. Варга (Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes. Varga O.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg., 1955, 20, № 1—2, 41—51 (нем.)

Автор исследует геометрию, индуцированную на гиперповерхности, погруженной в пространство Минковского и концентричной с единичной поверхностью этого пространства с уравнением

$$L^2(x) = \frac{1}{K} \quad (K = \mathrm{const}). \qquad (1)$$

Эта гиперповерхность рассматривается как геометрическое место трансверсальных к ней линейных элементов. На гиперповерхности индуцируется риманова метрика, и радиус-вектор x^i ортогонален к гиперповерхности (1). Он доказывает, что если $\gamma_{\alpha\beta}$ метрический тензор гиперповерхности и

$$\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\rho} - \gamma_{\gamma\rho}\gamma_{\beta\alpha}$$

— метрический тензор бивектора гиперповерхности, принадлежащего точке x^i, то тензор кривизны, принадлежащий направлению k^i

$$S^j_{khi} = 2L^2 C_{[h|m|} {}^{j} C_{k]i}^{m},$$

равен тензору кривизны Римана-Кристоффеля единичной поверхности в точке, соответствующей этому направлению, увеличенного на метрический тензор бивектора этой точки. Эта же теорема имеет место для финслерова пространства, если эта поверхность является индикатриксом в точке x^i.

Риманова метрика имеет на выпуклой поверхности (1) постоянную кривизну тогда и только тогда, когда

$$S_{khji} = -c \begin{vmatrix} g_{kj} - l_k l_j & g_{ki} - l_k l_i \\ g_{hj} - l_h l_j & g_{hi} - l_h l_i \end{vmatrix}.$$

Наконец, он доказывает, что риманова метрика, индуцированная на единичной поверхности, совпадает с угловой метрикой направлений, исходящих из начальной точки. A. Rapcsák

4343 «Абсолютные» пространство и время в классической физике и в теории относительности. Гомиш (Espaço e tempo «absolutos» na física clássica e na teoria da relatividade. Gomes Ruy Luis), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 13—27 (порт.)

Элементарное перемещение материальной точки вдоль мировой линии определяет собственное время и собственное пространство (многообразие всех перемещений четырехмерного пространства, ортогональных к данному) этой точки. Семейство временно-подобных линий, допускающее трехмерные ортогональные поверхности, характеризует класс материальных точек, для которых можно ввести общие для этого класса («абсолютные») время и пространство. При этом системы отсчета, связанные с этими точками, переходят одна в другую при помощи преобразований довольно узкой группы (в случае специальной теории относительности параллельных переносов. По мнению автора, во всех построенных до сих пор космологических моделях (за исключением модели Гёделя) встречается семейство линий, обладающее указанными свойствами и имеющее объективное физическое значение (направление среднего движения материи); поэтому при изучении этих моделей можно ввести абсолютные время и пространство. Г. К. Энгелис

4344. Исследование по единой теории гравитации и электромагнетизма. (Часть первая). Маравалль-Кассесновес (Ensayo de teoria unitaria de la gravitacion y del electromagnetismo. (Primera parte). Maravall Casesnoves Dario), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, 15, № 3—4, 88—114 (исп.)

Изучается новый класс пространств в целях дальнейшего применения в единой теории поля. В пространстве Римана с метрическим тензором $g_{ij} = g_{ji}$ вводится аффинная связность с коэффициентами $\Gamma^i_{jk} + a^i_j \lambda_k$, где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля, $\lambda_k = dx_k/ds$, a^i_j — произвольный тензор, для которого $a_{ij} = -a^i_j$. Получается пространство с кручением, обладающее, однако, некоторыми свойствами риманова пространства. Так, формулы абсолютного диф-

ференцирования для тензоров и псевдотензоров отличаются от римановых (при связности Γ^i_{jk}) дополнительными слагаемыми, но для g_{ij} и для псевдоскаляров эти слагаемые аннулируются, оператор Лапласа имеет выражение

$$\Delta V \equiv g^{ik}\frac{D^2V}{Dx^kDx^i} - a^{hi}\lambda_h\frac{\partial V}{\partial x^i},$$

геодезические линии являются кратчайшими и т. п. Подробно изучается параллельное перенесение вектора вдоль замкнутого контура, свойства тензора кривизны, внешнее дифференцирование, структурные уравнения пространства. При этом почти не используется общая теория пространств аффинной связности, а все соотношения выводятся по образцу обычного риманового пространства. Г. К. Энгелис

4345. Производная Ли в пространстве опорных элементов. Лаптев Б. Л., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу, МГУ, 1956, вып. 10, 227—248

В первой части статьи автор излагает результаты, полученные им в предыдущих работах. Дается определение пространств опорных элементов, обобщающих пространства линейных элементов, гиперплоскостных элементов, и другие, и определение производной Ли в этих пространствах. Более детальному рассмотрению подверглось пространство тензорных опорных элементов, в котором была построена аффинная связность. Сюда же переносится определение производной Ли.

Во второй части статьи изучается теория автоморфизмов пространства аффинной связности тензорных опорных элементов. Для простоты связность берется симметрической и усеченной. Автоморфизмы образуют псевдогруппу точечных преобразований. Для отыскания инфинитезимальных операторов ее $X = v^\alpha(x)\,\partial_\alpha$ надо интегрировать систему уравнений в частных производных второго порядка на $v^\alpha(x)$:

$$\overset{L}{D}L^\alpha_{\beta\gamma} - 0,$$

где $L^\alpha_{\beta\gamma}$ — объект связности, а $\overset{L}{D}$ — символ дифференцирования Ли. Интегрируемость этой системы изучается методами, изложенными в ранних работах автора. Получены необходимые и достаточные условия интегрируемости, которые сводятся к совместности некоторой линейной алгебраической системы. Результаты статьи обобщают ряд исследований автоморфизмов более частных видов пространств опорных элементов (Кнебельман, Дэвис, Кларк, Гу и др.) Библ. 21 назв. К. М. Белов

4346. Проблема эквивалентности интеграла $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$. Сунь Бэнь-ван (積分 $\int F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ 的等價 問題. 孫本旺), 數學學報. Шусюэ, сюэбао, 1954, 4, № 2, 223—224, (кит.; рез. англ.)

При помощи метода эквивалентности Картана к интегралу $\int F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$, взятому по кривой $y = y(x)$, $y^{(i)} = \partial y^{(i)}/(dx)^i$, присоединяется пространство инвариантно относительно группы касательных преобразований. Работа является обобщением статьи Картана (Cartan E., La géometrie de l'intégral $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, J. math. pures et appl., 1936). Формы

$$\omega^0 = F dx + a_i\,(dy^{(i-1)} - y^{(i)}dx),\ i = 1, \ldots, n,$$
$$\omega^i = \lambda^i_j\,(dy^{(i-1)} - y^{(j)}dx),\ j = 1, \ldots, i, \qquad (1)$$

определенные до преобразований

$$\overline{\omega}^0 = \omega^0 + u^0_i\omega^i,\ i = 1, \ldots, n,$$
$$\overline{\omega}^i = u^i_j\omega^j,\ j = 1, \ldots, i, \qquad (2)$$

обладают тем свойством, что если данный интеграл после касательного преобразования перешел в интеграл $\int \overline{F}d\overline{x}$, то построенные для него формы ω переходят в данные после этого же преобразования; и обратно, если построенные таким образом формы для двух интегралов равны при помощи какого-то преобразования, то это преобразование — касательное и переводит первый интеграл во второй. Эквивалентность интегралов сводится к эквивалентности форм. Формы ω определяют пространство. Таким образом дело сводится к определению форм ω, т. е. коэффициентов a, λ сначала с точностью до преобразований (2), а потом с помощью этих преобразований окончательно. Первое определение получается из инвариантных требований, чтобы имели место соотношения:

$$D\omega^0 = [\omega^n\omega^{n-1}]\ (\mathrm{mod}\ \omega^0, \ldots, \omega^{n-1}),$$
$$D\omega^i = [\omega^0\omega^{i+1}]\ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \ldots, \omega^i),\ i = 1, \ldots, n-1,$$
$$D\omega^n = \varepsilon\,[\omega^0, \omega^{n+1}]\ (\mathrm{mod}\ \omega^1, \ldots, \omega^n),\ \varepsilon = \pm 1.$$

Наконец, накладывая инвариантные требования на внешние производные форм $D\omega$, получаем единственным образом формы, удовлетворяющие соотношениям:

$$D\omega^0 = [\omega^0\omega^{n+1}] + \Omega^0,$$
$$D\omega^i = [\omega^0\omega^{i+1}] + \Omega^i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$D\omega^n = \varepsilon\,[\omega^0\omega^{n+1}] + \Omega^n,\ \varepsilon = \pm 1,$$
$$D\omega^{n+1} = \Omega^{n+1},$$

где Ω^0 — сумма внешних произведений из форм $\omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$, Ω^i $(i = 1, \ldots, n)$ — из форм $\omega^1, \ldots, \omega^i$, Ω^{n+1} — из форм $\omega^1, \ldots, \omega^{n+1}$.

Рассматривается пример для случая $F = (Ay^{(n)} + B)^{1/n}$. М. В. Васильева

4347. Вариационные методы в теории гармонических интегралов. Морри, Илс (A variational method in the theory of harmonic integrals. Morrey Charles B. Jr, Eells James Jr), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 6, 391—395 (англ.)

Авторы дают трактовку теории гармонических форм на компактных многообразиях с помощью вариационного исчисления.

Обозначения: $\mathfrak{L}^r_2$ — гильбертово пространство внешних r-форм на n-мерном компактном римановом многообразии $\mathfrak{M}_n$ со скалярным произведением $(\omega, \eta) = \int_{\mathfrak{M}_n} \omega \wedge *\eta$, где $\omega \wedge *\eta$ — внешнее произведение r-формы, ω и $(n-r)$-формы $*\eta$, сопряженной к η; $\mathfrak{B}^r_2$ есть гильбертово пространство r-форм со скалярным произведением

$$(\omega, \eta) \overset{\text{def}}{=} (\omega, \eta) + \int_{\mathfrak{M}_n} \sum_{(i),\alpha} \frac{\partial\omega_{(i)}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\eta_{(i)}}{\partial x^\alpha}\,dx$$
$$\alpha = 1, \ldots, n, (i) = i_1, \ldots, i_r,$$

причем $i_1 < \ldots < i_r$. Наконец, $\mathfrak{H}^r \subset \mathfrak{B}^r_2$ есть подпространство гармонических форм, т. е. таких форм, что $d\omega = \delta\omega = 0$ (для дважды непрерывно дифференцируемых форм гармоничность означает просто, что $\Delta\omega \overset{\text{def}}{=} d\delta\omega + \delta d\omega = 0$).

Приведем некоторые из шести сформулированных (без доказательства) теорем.

Теорема 3. Если $\omega_0 \in \mathfrak{L}_2^r$ и $\omega_0 \perp \mathfrak{H}^r$ (т. е. $(\omega_0, \chi) = 0$ тождественно для $\chi \in \mathfrak{H}^r$, то существует единственная r-форма $\Omega_0 \in \mathfrak{B}_2^r$, $\Omega_0 \perp \mathfrak{H}^r$, для которой $(d\Omega_0, d\zeta) + (\delta\Omega_0, \delta\zeta) = (\omega_0, \zeta)$ тождественно для $\zeta \in \mathfrak{B}_2^r$. Форма Ω_0 называется потенциалом формы ω_0.

Теоремы 4 и 5 касаются дифференцируемости потенциала и гармонических форм. Теорема 6 обобщает знаменитую теорему Кодаира:

Если $\omega \in \mathfrak{L}_2^r$, то существуют такие формы χ, α, β, Ω, где $\chi \in \mathfrak{H}^r$, $\alpha \in \mathfrak{B}_2^{r+1}$, $\beta \in \mathfrak{B}_2^{r-1}$, $\Omega \in \mathfrak{B}_2^r$, что $\omega = \chi + \delta\alpha + d\beta$, $d\alpha = \delta\beta = 0$, $\alpha = d\Omega$, $\beta = \delta\Omega$, причем Ω есть потенциал формы $\omega - \chi$. Если $\omega = \chi_1 + \delta\alpha_1 + d\beta_1$, то $\chi_1 = \chi$, $\delta\alpha_1 = \delta\alpha$, $d\beta_1 = d\beta$. Если $\omega \in \mathfrak{B}_2^r$, то α (β) есть потенциал формы $d\omega$ ($\delta\omega$). Следовательно, $\delta\alpha, d\beta \in \mathfrak{B}_2^r$.

Множества $\mathfrak{C}^r \overset{\text{def}}{=} \{\delta\alpha : \alpha \in \mathfrak{B}_2^{r+1}\}$, $\mathfrak{D}^r \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\beta : \beta \in \mathfrak{B}_2^{r-1}\}$, суть подпространства пространства $\mathfrak{L}_2^r$, и справедливо кодаировское разложение

$$\mathfrak{L}_2^r = \mathfrak{H}^r \oplus \mathfrak{C}^r \oplus \mathfrak{D}^r.$$

K. Maurin

4348. Об одной регулярной инфинитезимальной структуре, присоединенной к интегралам гиперповерхностей вариационного исчисления. Дебеве (Sur une structure infinitésimale régulière associée aux intégrales d'hypersurfaces du calcul de variations. Debever R.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia 1953, Roma, Ed. Gremonese, 1954, 214—221 (франц.)

Перефразировка работы Картана «Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire» (Paris, 1933) терминами теории инфинитезимальных структур.

М. В. Васильева

4349. Изучение периодов гармонических форм. Йонгманс (Étude des périodes des formes harmoniques. Jongmans F.), Bull. Soc. math. France, 1955, 83, № 2, 89-102 (франц.)

Периоды гармонических форм келеровых многообразий. Йонгманс (Périodes des formes harmoniques attachées aux variétés kählériennes. Jongmans F.), Bull. Soc. math Belgique, 1954 (1955), 7, № 1, 24—34 (франц.)

Гармоническая форма келерова многообразия единственным образом разлагается на неприводимые относительно унитарной группы части (примарные формы), каждая из которых характеризуется двумя целыми числами — классом k и типом h (см., например, Guggenheimer, Comment. math. helv., 1951, 29, 257—297).

Размерность пространства гармонических форм данного класса и типа не зависит от выбора келеровой метрики на комплексном многообразии. Скалярное произведение гармонических форм разного класса или типа равно нулю. Пусть π_u — периоды гармонической примарной формы порядка p относительно некоторого базиса p-мерных гомологий. Если $h \neq p/2$, то имеют место соотношения

$$\sum A_{uv}\pi_u\pi_v = 0,$$

$$i^p \sum A_{uv}\pi_u\bar{\pi}_v = (-1)^{h+k}R_k,$$

R_k вещественно > 0, A_{uv} — вещественные (для алгебраических многообразий — рациональные) числа. Отсюда следует, что периоды гармонической примарной формы с $h \neq p/2$ не могут быть все вещественными или все чисто мнимыми, а также что такая форма определяется заданием вещественных частей ее периодов. Доказывается обобщенная теорема Пуанкаре: если матрица периодов форм данной размерности имеет вид $\begin{pmatrix} P_1 0 \\ P_3 P_2 \end{pmatrix}$, где P_1 и P_2 — квадратные матрицы, то заменой базиса форм и базиса гомологий ее можно привести к виду $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$.

А. М. Васильев

4350. Действительные аналитические расслоенные пространства и действительные аналитические формы Келера на комплексно-аналитических расслоенных пространствах. Бланшар (Espaces fibrés analytiques-réels et formes de Kähler analytiques réelles sur les espaces fibrés analytiques complexes. Blanchard André), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 12, 1300—1302 (франц.)

Получены следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть B — действительное, аналитическое, компактное подмногообразие R^n, $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство (над B), действительное, аналитическое, слоем которого является связная группа Ли G; пусть K — ее компактная подгруппа. Тогда всякий раз, когда P/K допускает непрерывную секущую поверхность, оно допускает также и аналитическую.

Теорема 2. Пусть $E(B, F)$ — комплексно-аналитическое компактное келерово расслоенное многообразие, структурная группа которого имеет не более чем конечное число связных компонент. Тогда для наличия на E аналитической действительной формы Келера необходимо и достаточно, чтобы такую форму допускали база B и слой F.

И. З. Розенкноп

4351. О конформно-киллинговых тензорных полях. Сато (On conformal Killing tensor fields. Sato Isuke), 山形大學紀要 (自然科學), Ямагата дайгаку киё (сидзэн кагаку), 1956, 3, № 4, 175—180 (англ.; рез. япон.)

Автор называет векторное поле ξ^i в римановом V_n конформно-киллинговым, если $\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 2\Phi g_{ij}$. Поле кососимметрического тензора $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ называется конформно-киллинговым, если

$$\xi_{i_1 \ldots i_p;\, j} + \xi_{j i_2 \ldots i_p;\, i_1} = 2\Phi_{i_2 \ldots i_p} g_{i_1 j}.$$

Доказывается, что в компактном ориентируемом римановом V_n ($n > 2$) с положительно определенной метрикой вектор ξ^i и тензор $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ будут конформно-киллинговыми тогда и только тогда, если

$$g^{jk}\xi^i_{ij;\,k} + R^i_j\xi^j + \frac{n-2}{n}\xi^{ji}_{ij} = 0, \quad (R^i_j = g^{rk}R^i_{rkj}),$$

соответственно

$$g^{jk}\xi_{i_1 \ldots i_p;\, j;\, k} + R^s_{i_1}\xi_{s i_2 \ldots i_p} + \sum_{s=2}^{p} R^s_{i_s j i_1}\xi^j_{i_2 \ldots i_{s-1} s i_{s+1} \ldots i_p} + \frac{n-2}{n}\xi^s_{i_2 \ldots i_p;\, s;\, i_1} = 0.$$

Получены также аналогичные условия для случая, когда компактное ориентируемое метрическое многообразие обладает кручением S^i_{jk} с условием $S^r_{jr} = 0$ (здесь уже ξ^i и $\xi_{i \ldots i_p}$ называются псевдоконформно-киллинговыми вектором и тензором). Как следствия

отмечаются известные ранее результаты о киллинговых и псевдокиллинговых векторах и тензорах (РЖМат, 1957, 2658). А. П. Широков

4352. Космологические решения одного однородного принципа действия. Нольте (Kosmologische Lösungen eines homogenen Wirkungsprinzips. Nohl Walter), Comment. math. helv., 1955, 29, № 4, 338—350 (нем.)

Из вариационного принципа, введенного Шеррером (РЖМат, 1953, 1382), находятся уравнения поля, которые дальше специализируются для случая, когда линейный элемент и электромагнитный потенциал имеют вид

$$ds^2 = dx_0^2 - L^2(x_0)\left(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2\right),$$

$$\Phi^0 = \Phi(x_0), \quad \Phi^1 = \Phi^2 = \Phi^3 = 0.$$

Исключая из этих уравнений Φ, автор выводит уравнение для L

$$L\ddot{L} = -\sqrt{\alpha\dot{L}^2 + \beta}\dot{L} - \gamma(\alpha\dot{L}^2 + \beta)$$

(α, β, γ — постоянные), которое решается элементарным путем и подробно исследуется.

Примечание референта. Полученные результаты неубедительны, так как специализация неизвестных функций предпринимается не в обобщенном интеграле действия, а в полученных при вариировании этого интеграла уравнениях поля. Это дает для двух неизвестных L и Φ систему трех уравнений, совместимость которой в статье не исследуется. Г. К. Энгелис

4353 К. Геометрия четырехмерного пространства. Маннинг (Geometry of four dimensions. Manning Henry Parker. Dover, 1956, 348 pp., 3.95 doll.), Cumul Book Index, 1956, 59, № 4, 70 (англ.)

4354 Д. Проективные преобразования римановых пространств. Солодовников А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. гос. пед. ин-т, М., 1956

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4355. О многократных размещениях окружностей. Хеппеш (Über mehrfache Kreislagerungen. Heppes A.), Elem. Math., 1955, 10, № 6, 125—127 (нем.)

Если в евклидовой плоскости задано счетное множество конгруэнтных окружностей и каждая точка плоскости является внутренней точкой не более k этих окружностей, то мы говорим о k-кратном размещении окружностей. Если каждая точка плоскости является внутренней точкой не менее k окружностей, то имеется k-кратное покрытие плоскости окружностями. Плотности площадей d_k, принадлежащие k-кратному размещению, соответственно D_k, принадлежащие k-кратному покрытию, удовлетворяют неравенствам

$$kd_1 \leqq d_k < k, \tag{1}$$

соответственно

$$kD_1 \geqq D_k > k. \tag{2}$$

В статье уточняется замечание Л. Фейеш-Тота о том, что, начиная с некоторого значения k, в неравенствах (1) и (2) вместо $\leqq$ (соответственно $\geqq$) будет стоять $<$ (соответственно $>$). Именно, доказывается, что для случая размещения окружностей замена знака $\leqq$ знаком $<$ справедлива, начиная уже с $k=2$. Доказательство ведется путем построения k-кратного размещения окружностей. O. Varga

4356. Разделенные ячейки. Бамба (Divided cells. Bambah R. P.), Res. Bull. Panjab. Univ., 1955, № 81, 173—174 (англ.)

Б. Н. Делоне доказал (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 505—538), что если двумерная, неоднородная решетка, Λ не имеет ни одной точки на осях координат $x=0$, $y=0$, то в Λ имеется по крайней мере одна разделенная ячейка. Автор дает другое доказательство этого утверждения. Chao Ko

4357. Правильный декагексаэдр и одно специальное свойство пространств четвертого и высшего числа измерений. Мачинский (Décahexaèdre régulier et une propriété spéciale des espaces au nombre des dimensions égal à quatre ou supérieur. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 5, 472—475 (франц.)

Автор рассматривает новый класс двумерных «правильных», по его мнению, многогранников, поясняя их рядом примеров. Наиболее подробно рассмотрен «декагексаэдр» — многогранник, все грани которого суть одинаковые квадраты и который получается как совокупность тех 16-ти из 24 двумерных граней четырехмерного «куба», которые образуют двумерный многогранник. Сетка ребер этого многогранника топологически правильная, в некотором смысле сам многогранник в четырехмерном пространстве метрически правильный. Все это соответствует тому, что неплоский четырехугольник, составленный четырьмя из ребер обыкновенного правильного тетраэдра в трехмерном пространстве, является «правильным». Б. Н. Делоне

4358. Некоторые соображения о структурах просто транзитивных групп. Нагаи (Some considerations on structures of simply transitive groups. Nagai Tamaro), Tensor, 1955, 5, № 2, 91—94 (англ.)

Пусть G_n — просто транзитивная группа с базисными операторами $X_a = \xi^i_{(a)} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i, a = 1, \ldots, n)$. Так как при этом $\det\left|\xi^i_{(a)}\right| \neq 0$, то определяются $\xi^{(b)}_i$ из условия $\xi^{(b)}_i \xi^i_{(a)} = \delta^b_a$, и затем в многообразии $(x^1, \ldots, x^n)$ вводится риманова метрика заданием метрического тензора $g_{ij} = \sum_a \xi^{(a)}_i \xi^{(a)}_j$. При этом $\xi^i_{(a)}$ в этой метрике определяют ортонормальный репер. Обозначив через γ_{abc} коэффициенты вращения этого репера, через C^c_{ab} структурные константы группы G_n, автор получает равенства

$$C^c_{ab} = \gamma_{cab} - \gamma_{cba},$$

$$\gamma_{abc} = (C^a_{bc} + C^b_{ca} + C^c_{ba})/2,$$

которые связывают геометрические свойства конгруэнций $\xi_{(a)}$ со структурой группы G_n. Например (теорема 5), если все $\xi_{(a)}$ — нормальные конгруэнции, то каждые $r \leqslant n$ операторов из $\{X_1, \ldots, X_n\}$ порождают подгруппу G_r. Кроме того, используется понятие вариации конгруэнции $\xi_{(a)}$ относительно $\xi_{(b)}$: $\gamma_{ab} = \left(\sum_m \gamma^2_{abm}\right)^{1/2}$ (РЖМат, 1955, 2855).

Теорема 4. Если $\gamma_{na} = 0$, $a = 1, \ldots, n$, то операторы $X_1, \ldots, X_{n-1}$ порождают инвариантную подгруппу, а вектор $\xi^i_{(n)}$ параллелен вдоль каждой траектории этой подгруппы.

Теорема 7. Если $\xi_{(a)}$ — нормальные конгруэнции и $\gamma_{np} = 0$, $p = 1, \ldots, n-1$, то операторы $X_1, \ldots, X_{n-1}$ порождают инвариантную подгруппу, поверхности транзитивности которой геодезически параллельны. Г. И. Кручкович

4359. Об известном типе дифференциальных инвариантов проективной и аполлониевой групп плоскости. Штрёэр (Über einen gewissen Typus von Differentialinvarianten der projektiven und der apollonischen Gruppe der Ebene. Ströher Wolfgang), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. Abt., 1956, **164**, № 5-7, 189—216 (нем.)

r-членную группу преобразований плоскости можно задавать при помощи «параметрической фигуры», состоящей и k элементов $e_i(x_i, y_i, y_i' \ldots y_i^{(r_i)})$ порядка r_i, где $2k + \sum r_i = r$, перемещающихся независимо друг от друга по кривой. Тогда каждая производная $y_i^{(r_i+1)}$ при соответствующем выборе начального положения параметрической фигуры является «смешанным» инвариантом относительно рассматриваемой группы. Пользуясь основными инфинитезимальными преобразованиями группы и теоремой линеаризации Ковалевского (Kowalewski G., Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad Wiss. (Math.-naturwiss. Kl.), 1921, 73, 311—326), можно свести вычисление этих инвариантов к квадратурам. В работе вычислены смешанные инварианты для всех возможных параметрических фигур относительно группы проективных преобразований и относительно аполлониевой группы (т. е. группы сродства кругов Мёбиуса). Геометрическое значение этих инвариантов, дающих обобщение понятия кривизны, находится при помощи соприкасающихся образов. Р. Н. Щербаков

4360. О конечных плоскостях, в которых проективно выполняется конфигурация Фано. Ломбардо-Радиче (Sui piani finiti a configurazione di Fano universale. Lombardo-Radice Lucio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 2, 154—161 (итал.)

Доказывается, что всякая плоскость, указанная в заглавии (конфигурация Фано-7_3), дезаргова, если она O—l-транзитивна для некоторых неинцидентных точки O и прямой l.

Примечание референта. В настоящее время Глисон (Gleason A., Amer. J. Math., 1956, 78, 797—807) доказал, что последнее ограничение излишне. Л. А. Скорняков

4361. По поводу одной теоремы о конечных плоскостях над почти телом. Ломбардо-Радиче (A proposito di un teorema sui piani finiti sopra un quasicorpo. Lombardo-Radice Lucio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. fis., mat. e. natur., 1955, 18, № 6, 599—608 (итал.)

Восполняются пробелы предыдущей работы автора (реф. 4360). Л. А. Скорняков

4362. О ранге конечной проективной плоскости с характеристикой 3. Ломбардо-Радиче (Sul rango dei piani grafici finiti a caratteristica 3. Lombardo-Radice Lucio), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 2, 172—177 (итал.)

Автор устанавливает в линейной плоскости над телом с характеристикой 3 конфигурационную теорему «$3 = 0$» и показывает, что если ранг конечной плоскости с характеристикой 3 есть t, то а) t делится на 4, если t четно, б) $t+1$ делится на 27, если $t \equiv -1 \pmod 3$ и б) t сравнимо с одним из чисел 0, 1, 3, 9 или, наконец, 12 по модулю 13. Автор ставит две новые задачи: 1) улучшить эти ограничения, 2) найти аналогичные ограничения для случая характеристики p. М. П. Черняев

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4363. Трехточечно дугообразная выпуклость. Валентайн (Three point arcwise convexity. Valentine F. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 671—674 (англ.)

Выпуклой дугой называется дуга, содержащаяся в границе плоского выпуклого множества точек. Плоское множество S называется трехточечно дугообразно выпуклым, если любые три точки его находятся на выпуклой дуге, содержащейся в S.

Автор дает следующую характеристику этих множеств: Для того чтобы замкнутое плоское множество, содержащее по крайней мере три точки, было трехточечно дугообразно выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было одним из следующих трех видов: 1) S — выпуклое множество, 2) S — замкнутое и связное подмножество границы выпуклого множества, 3) $S = P - Q$, где P — замкнутое выпуклое множество и $Q \subset P$ — ограниченное открытое выпуклое множество. J. W. Jaworowski

4364. О выпуклых открытых поверхностях, касающихся сферы вдоль границы. Гойе (Sur les calottes convexes tangentes tout le long de leur bord à une sphère. Gohier Simone), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 2, 154—156 (франц.)

Автор доказывает следующую теорему. Две выпуклые открытые изометричные поверхности, каждая из которых касается вдоль границы некоторой сферы, или конгруэнтны или зеркально симметричны. Используя для доказательства теорему Гаусса, автор показывает конгруэнтность границ указанных поверхностей. Затем эти поверхности соответствующими конгруэнтными сферическими заклейками дополняются до замкнутых изометричных выпуклых поверхностей. После этого из теоремы А. В. Погорелова об однозначной определенности выпуклых поверхностей (РЖМат, 1953, 1400) следует сформулированная теорема. Э. Г. Позняк

См. также: 3683, 3684, 3696, 3903, 4004, 4018, 4187

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4365. О методе конечных разностей в нелинейных граничных задачах. I. Шрёдер (Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. I. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 9-10, 319—331 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$\varphi'' + g(x, \varphi, \varphi') = 0$$

при граничных условиях типа Штурма или граничных условиях периодичности. Метод конечных разностей приводит к системе, вообще говоря, нелинейных уравнений. Изучаются приемы итераций для решения этих уравнений. При любом итерационном шаге получающиеся новые значения иногда оказываются решениями системы линейных уравнений. Неизвестные этой системы однако могут непосредственно быть найдены без процесса исключения неизвестных. Для рассмотренных итерационных приемов приводятся условия сходимости и оценки погрешностей.

Конкретно рассматриваются уравнения

$$\varphi'' + f(x, \varphi) = 0, \quad \varphi'' + f(x, \varphi, \varphi') = 0,$$
$$\varphi'' + \varkappa\varphi' + c\varphi + f(x, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'' + \varkappa\varphi' + c\varphi + f(x, \varphi, \varphi') = 0.$$

Приводятся два числовых примера. Н. А. Бразма

4366. **Приближенный метод решения систем сингулярных дифференциальных уравнений. Чечик В. А.,** Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 4, 517—520

Дается метод приближенного решения систем сингулярных дифференциальных уравнений

$$y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\lim_{x \to +0} y_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Относительно функций f_k предполагается:

1) f_k и f'_{k,y_l} непрерывны в области $D\{0 < x \leqslant b, |y_k| \leqslant a\}$,

2) $|f_k(x, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)| \leqslant \psi(x)$.

$$f'_{k,y_k}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant \psi(x),$$

$|f'_{k,y_l}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant \psi(x)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq k)$, где $\psi(x)$ — непрерывная на $(0, b]$ суммируемая функция. Эти условия обеспечивают существование и единственность решения системы (1) при условиях (2).

Для решения задачи (1)—(2) строится $2n$ последовательностей функций $y_{k\pm}^{[m]}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n; m = 1, 2\ldots)$, удовлетворяющих неравенствам

$$y_{k-}^{[m]}(x) \leqslant y_k(x) \leqslant y_{k+}^{[m]}(x),$$

где $y_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$ — решение задачи.

Доказывается, что последовательные приближения сходятся равномерно и монотонно к решению $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Предполагая дополнительно, что в области D имеют место неравенства

$$A\zeta_k(x) \leqslant f_{k,y_k}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant B\zeta_k(x) + \omega(x),$$

где A и B — положительные постоянные, а $\zeta_k(x)$ и $\omega(x)$ — непрерывные на $[0, b]$ суммируемые функции, автор утверждает существование интервала $[0, c]$, на котором справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \max_{[0,c]} \left[y_{k+}^{[m]}(x) - y_{k-}^{[m]}(x)\right] \leqslant q^m \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \max \left[y_{k+}^{[0]}(x) - y_{k-}^{[0]}(x)\right], \quad 0 < q < 1.$$

Кроме того, автор устанавливает существование решения и видоизменяет свой метод для некоторых классов сингулярных уравнений n-го порядка вида

$$y^{(n)}(x) = f(x, y_1, \ldots, y_n)$$

с начальными условиями $\lim_{x \to +0} y^{(k)}(x) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Следует заметить, что обычный метод последовательных приближений Пикара для решения систем, рассматриваемых в работе, в общем случае неприменим, так как подинтегральные функции в приближениях могут оказаться несуммируемыми. Б. Н. Бабкин

4367. **Об оценке ошибок численного интегрирования дифференциальных линейных уравнений второго порядка. Серве** (Sur l'estimation des erreurs dans l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre. Sérvais F.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1956, Sér. 1, **70**, № 1, 5—8 (франц.)

Автор оценивает ошибки численного интегрирования дифференциального уравнения $y'' = f(x)y + g(x)$. Показано, что на ошибку аппроксимации, пропорциональную h^4, накладывается ошибка накопления, которая для $f(x) > 0$ пропорциональна h^5 и растет по экспоненциальному закону, а для $f(x) < 0$ пропорциональна h^4 и колеблется. Н. А. Ронзина

4368. **Заметка о приближенном решении уравнений Пуассона и Лапласа методами конечных разностей. Ив, Скойнс** (A note on the approximate solution of the equations of Poisson and Laplace by finite difference methods. Eve J., Scoins H. I.), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 27, 217—223 (англ.)

Сравнивается приближенное решение уравнения Пуассона при фиксированной квадратной сетке шага h с решением того же уравнения для диагональной сетки шага $h/\sqrt{2}$, полученной из первоначальной сетки добавлением новых узлов — точек пересечения диагоналей квадратов первоначальной сетки. Устанавливается приближенный вид разложения решения разностного уравнения для уравнения Пуассона в некоторой фиксированной точке, обозначенной номером i, в зависимости от шага сетки h, именно

$$w_i = A_i \pm B_i h^2 + C_i h^4 \pm \ldots, \qquad (1)$$

причем коэффициенты разложения зависят от расположения рассматриваемой точки, а члены с двойными знаками следует брать с плюсом в случае квадратной сетки и с минусом в случае диагональной сетки. Разложение (1) точно в случае уравнения Лапласа.

Указывается возможность получения более точного решения уравнения Пуассона путем экстраполяции при $h^2 = 0$, основанной на равенстве (1). При этом используются несколько приближенных решений, соответствующих различным шагам сетки. Приводится числовой пример. Н. А. Бразма

4369. **Численное решение полигармонического неоднородного уравнения. Микеладзе Ш. Е.,** Инженерный сб., 1956, **23**, 190—202

Решается разностным методом уравнение

$$\Delta^m w = g(x, y, z) \qquad (1)$$

при заданных значениях $\Delta^k w$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ на границе области. При этом уравнение (1) представляется в виде двух уравнений $\Delta^{m-1} w = u$, $\Delta u = g$ и решается сначала уравнение $\Delta u = g$, а затем по найденным значениям $u(x, y, z)$ в узлах сетки решается уравнение $\Delta v = u$ с заданным граничным условием $v = \Delta^{m-2} w$ и т. д., пока не будут вычислены значения функции w во всех узлах сетки.

Доказывается существование и единственность решения построенных автором разностных уравнений с положительными коэффициентами и применимость к ним метода итераций. Дается оценка погрешности и доказывается сходимость процесса.

Конструируется и исследуется разностное уравнение изгиба многоугольных пластинок, свободно опертых по контуру. Рассматриваются колебания мембран и пластинок произвольной формы.

Отмечается, что излагаемая теория может быть применена и в случае уравнения $\Delta^m w - a\Delta^{m-1} w = g$.
Д. Ф. Давиденко

4370. Оценка погрешности для второй краевой задачи плоскостной теории потенциала. Бертрам (Fehlerabschätzung für die zweite Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie. Bertram G.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 1-2, 1—35 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Пусть в плоскости $w = x + iy$ дана односвязная область L с кусочно-гладкой, не имеющей двойных точек замкнутой границей Γ, которая посредством аналитической функции $z\langle w\rangle$ может быть однозначным образом конформно преобразована в единичный круг $\mathfrak{L}$ плоскости $z = X + iY$ с границей K. Предполагая, что для задачи Неймана в этой области найдено приближенное решение

$$\tilde{u} = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu (x, y), \qquad (1)$$

где $\varphi_\mu (x, y)$ — гармонические функции, а коэффициенты a_μ выбраны из условия «возможно лучшей» аппроксимации выражением (1) точного решения u, автор дает метод оценки погрешности $U = \tilde{u} - u$, представляющей собой решение задачи Неймана в вышеуказанной области L.

При весьма общих предположениях относительно нормальной производной U_n, заданной на границе Γ, решение последней задачи представляется интегралом Дини

$$U(r, \varphi) = U(0, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n \langle w(e^{i\vartheta})\rangle \, |w'(e^{i\vartheta})| \ln \chi \, d\vartheta$$

где $\chi = 1 - 2r\cos(\varphi - \vartheta) + r^2$,

$$U(0, 0) = \int_0^{2\pi} U(1, \varphi)\, d\varphi,$$

а $w(re^{i\vartheta})$ есть аналитическая функция, конформно преобразующая единичный круг $\mathfrak{L}$ в область L.

Распоряжаясь произвольной аддитивной постоянной так, чтобы $U(0, 0) = 0$, и учитывая, что U принимает свое максимальное значение на границе Γ, автор приходит к соотношению

$$U(1, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_n \langle w(e^{i\vartheta})\rangle |w'(e^{i\vartheta})| \ln \left|\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}\right| d\vartheta,$$

из которого, применяя обобщенную теорему о среднем значении интегрального исчисления, получает оценку

$$|U| \leqslant |U_n|_{\max} \cdot M_L,$$

где

$$M_L = \max_\varphi \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w'(e^{i\vartheta})| \ln \left|\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}\right| d\vartheta \right\},$$

или, применяя неравенство Буняковского—Шварца, оценку

$$|U| \leqslant \left\{ \int_0^{2\pi} U_n^2 \langle w(e^{i\vartheta})\rangle |w'(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \right\}^{1/2} \cdot N_L,$$

где

$$N_L = \max_\varphi \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} w'(e^{i\vartheta}) \ln^2 \left|\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}\right| d\vartheta \right]^{1/2}$$

Каждой области L соответствуют свои постоянные M_L и N_L, причем последние инвариантны относительно чистой трансляции, поворота и отражения на прямую. Однако M_L и N_L не инвариантны относительно более общих преобразований области L.

Приведены значения постоянных M_L и N_L для ряда простейших областей: круга, полукруга, прямоугольника и квадрата. На конкретных примерах дается сравнение указанных выше оценок, а также подчеркивается то обстоятельство, что получаемые таким образом оценки сильно завышены.

В дополнении к статье автор оценивает погрешность для шара радиуса R, доказывает теорему о максимуме на границе для $|\mathrm{grad}\, U|$, выводит ряд оценок для производных от гармонических функций.
Н. Я. Лященко

4371. О решении первой краевой задачи для эллиптического уравнения методом сеток. Гроссман Д. П., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 5, 770—772

Изучается вопрос о приближенном решении линейных алгебраических систем, возникающих при решении первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} - gu = f, \quad u|_\Gamma = 0$$

методом конечных разностей. Даются правила нумерации узлов решетки, при выполнении которых метод Зейделя сходится в два раза быстрее метода простых итераций. Автор указывает, что близкие результаты получены Янгом (РЖМат, 1955, 1953).
О. А. Ладыженская

4372. О вычислении собственных значений оператора Лапласа методом сеток. Гроссман Д. П., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 4, 595—597

Дается способ подсчета коэффициентов алгебраического уравнения, по корням которого легко вычисляются характеристические корни разностной системы, возникающей при решении методом конечных разностей задачи о собственных значениях оператора Лапласа в ограниченной двумерной области (x, y) при граничном условии $u|_S = 0$. Разностная схема берется простейшая.
О. А. Ладыженская

4373. О численном интегрировании уравнения теплопроводности в полярных сетках. Юшков П. П., Тр. Ленингр. технол. ин-та холодильн. пром-сти, 1956, **14**, 315—323

Решается разностным методом уравнение теплопроводности $\partial T/\partial t = a^2 \Delta T$ для бесконечного круглого цилиндра, где оператор Δ берется в полярных координатах r, φ. При этом все производные заменяются простейшими разностными соотношениями. Для точек оси цилиндра оператор Лапласа заменяется по формуле Гершгорина С. А. (Изв. Ленингр. политехн. ин-та, 1927, 30).

В случае, когда T от угла φ не зависит, выводятся формулы, которые при некоторых соотношениях между шагами по оси r и оси t являются устойчивыми. Использование полученных формул иллюстрируется численным примером.
Д. Ф. Давиденко

4374. Об использовании метода Ричардсона для численного решения уравнения Лапласа на машине ОРДВАК. Янг, Уорлик (On the use of Richardson's method for the numerical solution of Laplace's equation on the ORDVAC. Young David,

Warlick Charles H.), Ballistic Research Laboratories. Aberdeen Proving Ground, Md. Memo. Rep. 1953, № 707, 32 pp. (англ.)

Ричардсон (Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1910, 210, 307—357) для решения линейной системы $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j + d_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, предложил итерационную схему $u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \beta_n \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j^{(n)} + d_i\right]$, где β_n — постоянные, изменяющиеся от итерационного цикла к циклу (обозначено индексом); однако $\beta_{n+m} = \beta_n$; m — фиксированная постоянная. Метод Ричардсона был применен на машине ОРДВАК для решения обычного разностного аналога задачи Дирихле для квадрата с $19^2 = 381$ внутренними узлами. Для оптимальных m и β_n сходимость, в пределах заданной точности, значительно быстрее, чем в методе Гаусса—Зейделя, но не так быстра, как в менее общей «последовательной сверхрелаксации». Следует обратить внимание на возможность накопления погрешностей округления в методе Ричардсона.

М. А. Нутап

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 562.

4375. Исследование краевых задач. Часть I. Минимальные методы решения полуоднородных краевых задач. Эдман (Studies of boundary value problems. Part I. Minimum methods for solving semi-homogeneous boundary value problems. Ödman Sven T. A., Handl. Svenska forskningsinst. cement och betong, 1953, № 20, 44 pp.) (англ.)

Кратко изложены известные методы решения однородных краевых задач для дифференциальных уравнений. Описаны метод Ритца, метод наименьших квадратов, метод наименьших произведений, метод Галеркина, метод разложения функции ошибки. Дана механическая интерпретация методов. Для выбора первого приближения рекомендуется «ортогональный метод». При этом в качестве допустимой функции берется произведение постоянной на функции, зависящие от одной независимой переменной и параметров. Приведен пример. Доказательства отсутствуют. Библ. 8 назв.

Н. П. Жидков

4376. Расчет прямоугольных пластин переменной толщины методом сеток. Гуменюк (Розрахунок прямокутних пластин змінної товщини методом решіток. Гуменюк В. С.), Прикладна механіка, 1955, 1, А 4, 436—448 (укр.; рез. русс.)

4377. О численном решении задач распространения тепла с двумя и тремя пространственными переменными. Дуглас, Ракфорд (On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Douglas Jim, Jr, Rachford H. H., Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 421—439 (англ.)

Рассматривается приближенное решение методом сеток некоторых задач для уравнений параболического и эллиптического типов.

В части I для приближенного решения смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, y) \in R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in R, \qquad (1)$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t) \; (x, y) \in S, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

предлагается система разностных уравнений вида

$$\Delta_x^2 w^*_{i,j,n+1} + \Delta_y^2 w_{i,j,n} = \frac{w^*_{i,j,n+1} - w_{i,j,n}}{\Delta t},$$

$$((i\Delta x, j\Delta y) \in R^1, \; 0 \leqslant n\Delta t \leqslant T),$$

$$\Delta_y^2 w_{i,j,n+1} = \Delta_y^2 w_{i,j,n} + \frac{w_{i,j,n+1} - w^*_{i,j,n+1}}{\Delta t}, \qquad (2)$$

$$w_{i,j,0} = u_{i,j,0} \quad ((i\Delta x, j\Delta y) \in R^1),$$

$$w^*_{i,j,n+1} = w_{i,jn+1} = u^1_{i,j,n+1} \; ((i\Delta x, j\Delta y) \in S^1, \; 0 \leqslant n\Delta t \leqslant T).$$

Здесь $w^*_{i,j,n+1}$ играет роль вспомогательного неизвестного; исключая его из первых двух уравнений системы (2), получаем разностное уравнение с одной неизвестной функцией:

$$\Delta_x^2 w_{i,j,n+1} + \Delta_y^2 w_{i,j,n+1} = \frac{w_{i,j,n+1} - w_{i,j,n}}{\Delta t} + \Delta t \Delta_x^2 \Delta_y^2 (w_{i,j,n+1} - w_{i,j,n}). \qquad (3)$$

Методом разделения переменных доказывается устойчивость разностной схемы для квадратной области R. Затем, в предположении ограниченности производных u_{xxxx}, u_{xxyy}, u_{yyyy} и u_{tt} от функции u, являющейся решением задачи (1), доказывается для квадратной области R сходимость в среднем решения задачи (2) к функции u при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и $(\Delta x)^4 = o(\Delta t)$.

Далее рассматриваются обобщения: 1) на области общего вида, 2) на случай трех пространственных переменных и 3) для шагов сетки Δt_k, переменных во времени, именно удовлетворяющих равенству вида

$$\frac{\Delta t_n}{(\Delta x)^2} = \alpha + \beta t_n,$$

где $t_0 = 0$, $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k$.

В части II для приближенного решения граничной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y) \in R,$$

$$u(x, y) = g(x, y), \qquad (x, y) \in S \qquad (4)$$

берется известная система разностных уравнений вида

$$\Delta_x^2 w_{ij} + \Delta_y^2 w_{ij} = f_{ij}, \qquad (i\Delta x, j\Delta y) \in R',$$
$$w_{ij} = u_{ij}, \qquad (i\Delta x, j\Delta y) \in S', \qquad (5)$$

причем основным вопросом здесь является подбор подходящего приема итераций. Для решения системы (5) предлагается процесс итераций, выражаемый системой разностных уравнений

$$\Delta_x^2 w_{ij}^{(n+1/2)} + \Delta_y^2 w_{ij}^{(n)} = \frac{w_{ij}^{(n+1/2)} - w_{ij}^{(n)}}{a_n} + f_{ij},$$
$$(i\Delta x, j\Delta y) \in R',$$
$$\Delta_y^2 w_{ij}^{(n+1)} = \Delta_y^2 w_{ij}^{(n)} + \frac{w_{ij}^{(n+1)} - w_{ij}^{(n+1/2)}}{a_n}, \qquad (6)$$
$$(i\Delta x, j\Delta y) \in R',$$
$$w_{ij}^{(n)} = u_{ij}, \quad (i\Delta x, j\Delta y) \in S',$$

где $w_{ij}^{(n+1/2)}$ играет роль вспомогательного неизвестного, а последовательность чисел a_n подбирается

позже. Неизвестное $w_{ij}^{(n+1/2)}$ может быть исключено, в результате чего получается разностное уравнение, аналогичное (3).

Исследуется вопрос сходимости процесса итераций для прямоугольной области. Доказывается теорема: Если последовательность $\{a_n\}$ состоит лишь из ограниченных по модулю положительных и чисто мнимых чисел, то $w_{ij}^{(n)}$, определенное уравнением (6), сходится к решению системы (5). Детальнее рассматриваются действительные и чисто мнимые последовательности при квадратной области. Приводятся обобщения на область произвольной формы, а также на случай трех пространственных координат. Библ. 9 назв.

Н. А. Бразма

4378. Численное решение уравнений типа диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим от концентрации. Филип (Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. Philip J. R.), Trans. Faraday Soc., 1955, 51, 885—892 (англ.)

Рассматривается процесс итераций для численного решения уравнения

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

при условиях $\theta=\theta_n$ при $t=0$, $x>0$ и $\theta=\theta_0$ при $x=0$, $t\geqslant 0$, причем D является однозначной функцией от θ.

Применяется подстановка $\varphi=xt^{-\frac{1}{2}}$, в результате которой уравнение (1) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(D\frac{d\theta}{d\varphi}\right)$$

с соответствующими дополнительными условиями, что затем преобразуется в интегро-дифференциальное уравнение

$$\int_{\theta_n}^{\theta}\varphi d\theta=-2Dd\theta/d\varphi \qquad (2)$$

с дополнительным условием $\theta=\theta_0$, $\varphi=0$.

Пользуясь приближенными преобразованиями, решение уравнения (2) можно найти при помощи итераций. Особо рассматриваются значения φ и $\int\varphi d\theta$ вблизи $\theta=\theta_n$, для чего привлекается специальная функция

$$A(x)=2x\,\mathrm{ierfc}\,x/\mathrm{erfc}\,x,$$

где

$$\mathrm{ierfc}\,x=\int_x^\infty \mathrm{erfc}\,\zeta d\zeta=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\exp(-x^2)-x\,\mathrm{erfc}\,x.$$

Приводятся некоторые свойства функции $A(x)$, краткая таблица ее значений и два числовых примера.

Н. А. Бразма

4379. О численном интегрировании квазилинейного параболического дифференциального уравнения. Дуглас (On the numerical integration of quasilinear parabolic differential equations. Douglas Jim, Jr), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 35—42 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t}+G(x,t,u),\quad F\geqslant m>0, \qquad (1)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=f(x),\\ &u(0,t)=g_1(t),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ &u(1,t)=g_2(t),\quad t\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Предполагается, что решение уравнения (1) при условиях (2) существует в области $R: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T$ и имеет ограниченные производные $\partial^4u/\partial x^4$, $\partial^2u/\partial t^2$. В R предполагается еще существование и ограниченность производных $\partial F/\partial u$ и $\partial G/\partial u$.

Уравнения (1) и (2) заменяются системой конечноразностных уравнений

$$\begin{aligned} &w_{i0}=u_{i0}=f(x_i),\\ &\Delta^2 w_{i,n+1}=F(x_i,t_{n+1},w_{in})\frac{w_{i,n+1}-w_{in}}{\Delta t}+\\ &\qquad +G(x_i,t_{n+1},w_{in}),\\ &w_{0n}=u_{0n},\quad w_{Nn}=u_{Nn}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$\Delta^2 w_{in}=\frac{w_{i+1,n}-2w_{i,n}+w_{i+1,n}}{(\Delta x)^2},$$

$$x_i=i\Delta x,\ i=1,2,\ldots,N,$$

$$t_n=n\Delta t,\ n=0,1,\ldots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right],\ \Delta x=\frac{1}{N}.$$

Автор доказывает, что решение системы (3) сходится к $u(x_i,t_n)$ таким образом, что если $\Delta x=A(\Delta t)^\alpha$ и $\gamma=\min(1,2\alpha)$, то ошибка в точке (x_i,t_n) меньше, чем

$$C\cdot t_n\cdot e^{Ct_n}\ (\Delta t)^\gamma.$$

Положительная постоянная C зависит от A, m и верхних границ F, F_u, G_u, u_t, u_{t^2}, u_{x^4} в R. Доказательство проводится методом, аналогичным методу Pome (Rothe E., Math. Ann., 1930, 102, 650—670).

Кроме того, в работе показано, что при численном решении уравнения (1) методом конечных разностей объем вычислительной работы будет наименьшим в случае $\alpha=1/2$, если отношение $\Delta x/(\Delta t)^\alpha$ считать фиксированным.

Б. Н. Бабкин

4380. Приближенное интегрирование уравнений параболического типа. Блан (Sur l'intégration approchée d'équations du type parabolique. Blanc Charles), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 2, 146—152 (франц.; рез. нем.)

Применяется стохастический метод для оценки погрешности приближенного решения уравнения теплопроводности, полученного посредством конечноразностной аппроксимации соответствующего дифференциального оператора.

Автор рассматривает три конечноразностные схемы (названные им схемами малого оператора, большого оператора и многоточечной), сравнивает точность приближенных решений, полученных путем применения каждой из указанных схем (многоточечная и схема большого оператора дают значительно большую точность в сравнении со схемой малого оператора), и, наконец, подчеркивает тот известный факт, что для увеличения точности вычислений для любой конечноразностной схемы шаг по оси t должен выбираться сообразно с шагом по оси x.

Н. А. Ронзина

4381. О поведении решения конечноразностного аналога волнового уравнения. Камынин Л. И.,

Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 5, 589—598

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < a^2 < 1, \; x \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$t \geqslant 0$, заменяется конечноразностным

$$u_{m, n+1} = a^2 (u_{m+1, n} + u_{m-1, n}) + 2(1-a^2) u_{m, n} - u_{m, n-1}. \tag{2}$$

Исследуется то из «элементарных» решений $u_{m, n}$ уравнения (1), которое удовлетворяет условиям

$$u_{m0} = 0, \; u_{m1} = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

С помощью «преобразования Фурье» автор строит явное решение задачи (2), (3) и исследует его поведение при $m, n \to \infty$. Вне характеристического треугольника $x = \pm at$ уравнения (1) решение $u_{m, n}$ стремится к нулю со скоростью, не меньшей $n^{-\frac{2}{3}}$. Внутри же и на границе этого треугольника $u_{m, n}$ стремятся соответственно к пределам $\frac{1}{2} a$ и $\frac{1}{6} a$.

О. А. Ладыженская

4382. К численному решению задачи Лаврентьева—Бицадзе. Волков Е. А., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 5, 755—758

Для приближенного решения задачи

$$u_{xx} - u_{yy} = 0; \; u|_L = \varphi; \; u_x - u_y|_{y=0} = \psi_1,$$

в области D', расположенной в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ и ограниченной дугой L и отрезком AB оси $y = 0$, строится разностная схема, несколько отличная от предложенных ранее. Дается оценка погрешности в случае особенности точного решения в точке A. Кроме того, приводится один способ измельчения сетки в окрестности точки A, позволяющий повысить точность приближенного решения.

О. А. Ладыженская

4383. Приближенное решение уравнения диффузии методом Рунге—Кутта и при помощи правила Симсона. Канэко (Runge—Kutta 法と Simson 則とによる擴散方程式の近似解法. 金子會政), 工業化學雜誌, Kogё kagaku dzasshi, J. Chem. Soc. Japan. Industr. Chem. Sec., 1953, **56**, № 11, 821—823 (япон.)

4384. Вычисление собственных значений при помощи непрерывных дробей. Стесин И. М., Успехи матем. наук, 1954, **9**, 191—198

4385. Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур. Мысовских И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 19, 66—72

Рассматривается интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt + f(s), \tag{1}$$

где $K(s, t)$ и $f(s)$ — непрерывные в квадрате $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ и промежутке $a \leqslant s \leqslant b$ функции.

К интегралу $\int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt$ применяется некоторая формула механических квадратур

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt = \sum_{k=1}^n A_k K(s, t_k) \varphi(t_k) + \alpha(s).$$

Вопрос об оценке величины $\alpha(s)$ является основным и его решение непосредственно приводит и оценке погрешности приближенного решения уравнения (1).

Для $\alpha(s)$ выводится формула

$$\alpha(s) = \varepsilon_f(s) + \lambda \int_a^b \varepsilon(s, t) \varphi(t) \, dt,$$

где

$$\varepsilon_f(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) \, dt - \sum_1^n A_k K(s, t_k) f(t_k)$$

и

$$\varepsilon(s, t) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) K(t, t') \varphi(t') \, dt dt' - \int_a^b \sum_{k=1}^n A_k K(s, t_k) K(t_k, t') \varphi(t') \, dt'.$$

Оценка $\alpha(s)$ сводится к оценке рассматриваемых остатков квадратурной формулы, примененной к известным функциям $K(s, t') f(t')$ и $K(s, t') K(t', t)$, и модуля точного решения интегрального уравнения $\varphi(t)$.

Приводится оценка величины $\max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi(s)|$. Оценка же остаточных членов квадратурной формулы для известных функций может быть дана известными способами при предположении, что $K(s, t)$ и $f(t)$ имеют достаточное число производных. Приводятся два примера.

А. Н. Иванова

4386. Численное интегрирование по симплексу. Хаммер, Страуд (Numerical integration over simplexes. Hammer Preston C., Stroud Arthur H.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, **10**, № 55, 137—139 (англ.)

Выводятся две кубатурные формулы для интегралов по S^n — n-мерному симплексу, точные для полиномов от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, степени не выше третьей и второй соответственно.

Пусть $V_0, V_1, \ldots, V_n$ — вершины симплекса и C — его центр. Тогда для полинома третьей степени

$$\int_{S_n} f dV_n = a_n \sum_0^n f(U_i) + c_n f(C),$$

где $a_n = \frac{(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)} \Delta_n$, $c_n = -\frac{(n+1)^2}{4(n+2)} \Delta_n$,

а Δ_n — гиперобъем симплекса, равный $\frac{1}{n!}$.

Узлы $U_i = \frac{2}{n+3} V_i + \frac{n+1}{n+3} C \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$

лежат на медианах симплекса.

Для полинома второй степени

$$\int_{S_n} f \, dV_n = \frac{\Delta_n}{n+1} \sum_0^n f(U_i),$$

где узлы $U_i = rV_i + (1-r) C$, $i = 0, 1, \ldots, n$, а $r = \pm \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, если $r > 0$, то узлы лежат внутри симплекса, а если $r < 0$, то — вне.

Доказательство существования таких формул ведется индукцией по n. Формула для кубического полинома при $n > 3$ является наилучшей, так как число коэффициентов у произвольного полинома третьей степени от n переменных равно $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$, а узлов в формуле $n+2$. Для $n = 1$ эта формула основана на трех узлах, а формула Гаусса на двух.

Авторы замечают, что метод получения аналогичных формул может быть применен и для полиномов высших степеней, но представляет большие трудности.

А. Н. Иванова

4387. Численное интегрирование по симплексам и конусам. Хаммер, Марлоу, Страуд (Numerical integration over simplexes and cones. Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 55, 130—137 (англ.)

Метод существенно основывается на следующей теореме о преобразовании кубатурной формулы при аффинном преобразовании области: Если

$$\sum_j a_j f(\xi_j) - \int_R \varphi(\xi)\, dV_n = E(f),$$

тогда

$$\sum_j W a_j g(\eta_i) - \int_{TR} g(\eta)\, dV_n = WE(f),$$

где T есть аффинное преобразование $\eta = A\xi + \eta_0$ E_n в себя, $g(\eta) = f(\xi)$, а W — абсолютная величина детерминанта матрицы A, TR — аффинный образ области R n-мерного пространства.

Пусть n-мерная область R лежит в гиперплоскости $x = 1$ $(n+1)$-мерного пространства E_{n+1}. Если (ξ) — произвольная точка E_n, рассмотрим соответствующую точку (ξ, x) в E_{n+1}. Конус в E_{n+1} есть множество точек (ξ, x), для которых $\xi \subset R$, а $0 \leqslant x \leqslant 1$; $x = 0$ соответствует вершина конуса, $x = 1$ — основание конуса R. Пусть C есть конус в E_{n+1} и $f(\xi, x)$ определена в конусе C. Ищется формула вида

$$\int_C f(\varphi)\, dV_{n+1} = \sum_1^k a_j f(\varphi_j), \quad \varphi \in E_{n+1}. \qquad (1)$$

Задача сводится к нахождению кубатурной формулы по основанию конуса в E_n. Если существует такая формула в E_n

$$\int_R f(\xi, 1)\, dV_n \doteq \sum_j a_j f(\xi_j, 1), \qquad (2)$$

то

$$\int_C f(\xi, x)\, dV_n = \int_0^1 dx \int_{xR} f(\xi, x)\, dV_n, \qquad (3)$$

а кубатурная формула для $\int_{xR} f(\xi, x)\, dV_n$ получается на основании вышеприведенной теоремы, так как xR есть афинный образ. R:

$$\int_{xR} f(\xi, x)\, dV_n = x^n \sum_j a_j f(x\xi_j, x).$$

Пусть $g(x) = \sum_j a_j f(x, \xi_j, x)$; достаточно применить формулу на $[0, 1]$ с весом x^n к функции $g(x)$

$$\int_0^1 x^n g(x)\, dx = \sum_i b_i g(x_i), \qquad (4)$$

чтобы получить искомую кубатурную формулу

$$\int_C f\, dV_{n+1} = \sum_i \sum_j b_i a_j f x_i \xi_j; x_i. \qquad (5)$$

Если формула (2) точна для полинома f от n переменных степени не выше m в области R, а формула (4) точна для полиномов степени m относительно x, то формула (5) точна для полиномов от $(n+1)$ переменного степени не выше m.

Для симплексов эти формулы получаются по индукции; исходя из отрезка получаются формулы для треугольника, исходя из треугольника — для тетраэдра и т. д.

Кубатурные формулы для симплекса в E_n, точные для многочленов степени $2m-1$ с m^n узлами, получаются исходя из формулы Гаусса для отрезка по весу x^n.

Приводятся таблицы соответствующих ортогональных полиномов по весу x^n для $n = 1, 2$ степени $m = 5$, и для $n = 3$ с $m = 4$. Приводятся различные кубатурные формулы для треугольника и тетраэдра.

А. Н. Иванова

4388. О приближенном вычислении двойных интегралов. Сенютович В. А., Тр. Ленингр. технол. ин-та холодильн. пром-сти, 1956, 14, 324—330

Пусть $f(x, y) \geqslant 0$. Автор предлагает вычислять приближенно двойной интеграл $\int\int_\sigma f(x, y)\, dxdy$, где (σ) — произвольная область, разбиением области на элементарные части, каковыми являются прямоугольники, прямоугольные треугольники и прямоугольные трапеции. Такие области получаются, если сделать разбиение области (σ) на части сетью прямых, параллельных осям координат, а границу аппроксимировать ломаной линией, получающейся от соединения прямыми всех точек пересечения прямых прямоугольной сетки с границей области.

Выводятся кубатурные формулы для интегрирования по этим элементарным областям с помощью замены поверхности $z = f(x, y)$ поверхностью второго порядка.

Кубатурная формула для прямоугольника имеет вид:

$$\int\int f(x, y)\, dxdy \doteq \frac{hk}{12}(z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + 8z_4), \qquad (1)$$

где z_0, z_1, z_2, z_3 — значения функции $f(x, y)$ в вершинах прямоугольника, а z_4 — в центре его; h и k — длины сторон.

Кубатурная формула для прямоугольной трапеции:

$$\int\int f(x, y)\, dxdy \doteq \frac{h}{12}[k_0(z_0 + z_1) + 8k_1 z_4 + k_2(z_2 + z_3)], \qquad (2)$$

где h — высота трапеции, k_0 — длина нижнего основания и z_0 и z_1 — значения функции в вершинах, прилежащих к нему; k_2 — длина верхнего основания и z_2; z_3 — значения функции в вершинах, прилежащих к этому основанию; k_1 — длина средней линий, z_4 — значение функции в середине средней линии.

Формула (1) применяется для приближенного вычисления площади поверхности эллипсоида. При переходе к параметрическому заданию поверхности область интегрирования будет квадратом.

Применение формулы (1) дает относительную погрешность, колеблющуюся между 0,23% и 4,72%, в зависимости от соотношения длин полуосей. На примерах иллюстрируется также применение формулы (2). Приводится относительная погрешность результата.

А. Н. Иванова

4389. Коэффициенты для интерполяции с двукратными узлами, образующими квадратную сетку в комплексной области. Солзер (Coefficients for complex osculatory interpolation over a Cartesian grid. Salzer Herbert E.), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 2, 152—163 (англ.)

Интерполяционная формула Эрмита в случае n двукратных узлов z_k, образующих квадратную сетку с шагом h, может быть записана в виде

$$f(z_0 + Ph) = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k^{(n)}(P) \cdot f(z_k) + hB_k^{(n)}(P) \cdot f'(z_k)] + R_{2n},$$

Рассматривается задача приближенного номографирования в следующей постановке. Задана номограмма при помощи уравнения Массо

$$\Delta(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} g_1(x) & h_1(x) & 1 \\ g_2(y) & h_2(y) & 1 \\ g(z) & h(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

и функция $z = \varphi(x, y)$ такая, что в замкнутой области G $\Delta'_z(x, y, \varphi(xy)) \geqslant a > 0$. Если решение $z = \psi(x, y)$ уравнения (1) в $H \subset G$ удовлетворяет неравенству $|\varphi - \psi| \leqslant 2|\Delta|/\Delta'_z$, то $z = \psi(x, y)$ называется приближением функции $z = \varphi(x, y)$ посредством номограммы (1). Требуется подобрать и наилучшим образом вещественные числа a_1, b_1, a_2, b_2 такие, что для определителя

$$\Delta_1(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} g_1(x) + a_1 & h_1(x) + b_1 & 1 \\ g_2(y) + a_2 & h_2(y) + b_2 & 1 \\ g(z) & h(z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

выполняется неравенство $\max_G |\Delta_1(x, y, \varphi(x, y))| \leqslant \max_G |\Delta(x, y, \varphi(x, y))|$ (задача о свободном сдвиге) или при дополнительном условии $\min_G |\Delta'_{1z}(x, y, \varphi(x, y))| \geqslant m$ (задача об ограниченном сдвиге шкал). Данная задача решается как задача наилучшего приближения функции $\Delta(x, y, \varphi(x, y))$ при помощи заданных функций $h_2(y) - h(\varphi(xy))$, $h(\varphi(x, y)) - h_1(x)$, $g(\varphi(x, y)) - g_2(y)$, $g_1(x) - g(\varphi(xy))$.

Доказывается, что при некоторых условиях существуют сдвиги шкал x и y относительно шкалы z, обеспечивающие наилучшее исправление номограммы. Основной теоремой автор считает следующую: Если номограмма не содержит двух прямых параллельных шкал, то задачи о свободном и ограниченном сдвиге шкал разрешимы по меньшей мере для одной функции, не совпадающей близ любой обыкновенной точки номограммы с функцией, определяемой этой номограммой.

При малых сдвигах шкал задача об исправлении номограммы становится задачей линейной аппроксимации. Рассматривается в общем виде приближенный метод для задачи линейной аппроксимации и задача о сдвиге шкал решается приложением этого метода. Дается оценка погрешности. Г. Е. Джемс-Леви

4401. Численное решение дифференциального уравнения, описывающего изменение частоты во времени при дефиците мощности в энергосистеме. Гарсиашвили Ш. Д., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1956, № 2, (43), 77—90 (рез. груз.)

Составляется и численно решается дифференциальное уравнение, описывающее изменение частоты во времени при мгновенных изменениях нагрузки в энергосистеме, с учетом состава нагрузки. Для численного интегрирования выражения

$$\int \frac{fdf}{af^3 + bf^2 + cf + d}$$

при различных системах констант применяется разрезная номограмма из выравненных точек типа Коши, по которой находятся корни знаменателя.

Г. Е. Джемс-Леви

4402. Номографирование функции многих переменных на базе метода выравненных точек. Вильнер И. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР. 1956, 146

4403. Номограмма с двумя шкалами на общем носителе и наклонной шкалой для функции трех переменных. Бонфильоли (Nomograph for two common-axis scales and one oblique scale for functions of three variables. Bonfiglioli Luisa), Riveon lemat., 1955, 9, 29—35 (иврит; рез. англ.)

Рассматривается уравнение

$$lf_1(a_1) + mf_2(a_2) + nf_3(a_3) = k.$$

Для него строится номограмма с ориентированным транспарантом. На неподвижной плоскости находятся шкалы переменных a_1, a_2, a_3, из которых две совпавшие, на транспаранте — три луча из одной вершины.

Г. Е. Джемс-Леви

4404. Новые математические номограммы для быстрых вычислений. Джорж (New mathematical charts speed calculations. George E. J.), Petrol. Engr., 1955, 27, № 7, C-32—C-34 (англ.)

Сообщается о новых математических номограммах, которые представляют собой логарифмическую сетку. Номограммы позволяют производить деление, умножение, извлечение квадратного и кубического корней и находить логарифмы чисел. Подчеркивается возможность быстрых вычислений с помощью этих номограмм. Точность вычислений такая же, как на логарифмической линейке. Приводятся чертежи номограмм и примеры пользования ими. И. Б. Ганцевич

4405. Методы прикладной математики. Курант (Methods of applied mathematics. Courant Richard), Recent Advances Sci., New York, 1956, 1—14 (англ.)

4406 К. Методы решения уравнений в частных производных. Уравнение теплопроводности. Уравнение Лапласа. Волновое уравнение. Легра (Techniques de résolution des équations aux dérivées partielles. Equation de la chaleur. Equation de Laplace. Équation des ondes. Legras J. Paris, Dunod, 1956, 180 p., ill.) (франц.)

Рассматриваются уравнения в частных производных второго порядка трех типов: эллиптические, гиперболические и параболические, причем в каждом случае автор ограничивается рассмотрением наиболее простых уравнений, характерных для каждого из рассматриваемых типов и наиболее часто встречающихся в приложениях. Книга написана ясным и доступным языком.

В гл. 1 содержатся общие вопросы, относящиеся к уравнениям в частных производных, выясняется сущность отличия от обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с рассмотрением задачи Коши вводится понятие характеристик.

В гл. 2 «Уравнение теплопроводности» автор ограничивается рассмотрением простейшего случая одной пространственной переменной. Излагаются два метода решения уравнения теплопроводности—метод разделения переменных (в связи с чем вводится понятие ортогональной системы функций) и метод конечных разностей. Среди других граничных условий рассматривается также периодическая зависимость от времени и отыскание частных периодических решений. Подробно излагается применение метода конечных разностей к решению уравнений рассматриваемого вида.

Три следующие главы посвящены уравнению Лапласа. В гл. 3 «Уравнение Лапласа. Гармонические функции и аналитические функции» кратко излагаются элементы теории аналитических функций, а именно рассматриваются элементарные аналитические функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ и др., вводится понятие конформного преобразования, определяется интеграл от аналитической функции, приводится формула Коши, вводится

понятие вычетов и их применение к вычислению определенных интегралов. Выясняется связь аналитических функций с гармоническими функциями.

В гл. 4 излагаются алгебраические методы. Этим термином автор называет методы, в которых результат может быть записан в символах алгебры и анализа, в отличие от методов, дающих решение в виде таблицы чисел. Решается задача Дирихле для круга применением аналитических функций. Здесь же подробно излагается метод частных решений в случае декартовых и полярных координат и решается внешняя задача Дирихле для круга. Вводится понятие функции Грина. Строится функция Грина для круга.

В гл. 5 «Уравнение Лапласа. Методы аналогий и численные методы» автор кратко излагает суть метода аналогий, который состоит в экспериментальном определении решения некоторой физической задачи и интерпретации найденного решения как решения соответствующей математической задачи (например, гармонические функции истолковываются как электрический потенциал). Рассматривается применение этого метода к задачам Дирихле и Неймана.

Большое внимание уделяется численным методам. Приводится схема вычислений для контура, составленного из отрезков прямых, параллельных линиям сетки, а также для произвольного контура. Подробно излагается метод релаксации на примере системы 5 линейных уравнений с 5 неизвестными и его применение к уравнению Лапласа в случае различных граничных условий.

В гл. 6 рассматриваются основные свойства волнового уравнения, роль начальных и граничных данных, свойства характеристик. Рассматривается применение метода характеристик к решению волнового уравнения. Излагается метод Бержерона, который представляет собой соединение метода характеристик с графическим методом. Кроме упомянутых методов, рассматривается метод разделения переменных в применении к волновому уравнению и к телеграфному, а также излагается метод конечных разностей для телеграфного уравнения.

Последняя гл. 7 посвящена уравнениям с более чем двумя переменными. Рассматривается волновое уравнение в случае двух пространственных переменных при периодической зависимости решения от времени. Вводится понятие собственных значений и решается задача о собственных значениях для прямоугольника и для кругового контура. Рассматривается также волновое уравнение для случая трех пространственных переменных. Применяется метод разделения переменных к решению уравнения Лапласа в случае трех переменных в декартовых и цилиндрических координатах. Приводится решение уравнения теплопроводности методом конечных разностей в случае двух пространственных переменных и методом разделения переменных в декартовых и цилиндрических координатах в случае трех пространственных переменных.

Г. И. Бирюк

4407 К. **Номографические вычисления. Введение в номографию для школы. Кислер** (Nomographisches Rechnen. Einf. in die Nomographie für Schule und Beruf. Kießler Fritz. Essen, W. Girardet, 1956, 190 S., ill., 9.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 32, 2269 (нем.)

4408 К. **Сборник статей по методам Монте-Карло. Мейер** (изд.) (Symposium on Monte Carlo methods, held at the University of Floria, conducted by the Statistical Laboratory, sponsored by Wright Air Development Center of the Air Research and Development Command, March 16 — and 17 1954. Ed. Meyer Herbert A. New York, Wiley; London, Chapman & Hall, 1956, XVII, 382 pp., ill., 60sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 359, 11 (англ.)

4409 К. **Приближенные методы высшего анализа. Канторович, Крылов** (Näherungsmethoden der höheren Analysis. Kantorowitsch L. W., Krylow W. I. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 611 S., Ill.) (нем.)

4410 К. **Численные и графические методы. Лукашевич, Вармус** (Metody numeryczne i graficzne. Cz. 1. Lukaszewicz Józef, Warmus Mieczysław. Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk., 1956, 429, 3 nibl. s., il., 29.40 zk), Przew. bibliogr., 1956, **12**, № 37, 553 (польск.)

4411. **Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Иванов В. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

ТАБЛИЦЫ

4412. **Новые методы табуляции функций. Пашковский** (Nowe metody tablicowania funkcji. Paszkowski S.), Zastosow. mat., 1955, **2**, № 3, 231—262 (польск.)

Рассматриваются новые методы табулирования функций, позволяющие значительно уменьшить существующие таблицы без уменьшения точности их. При этом пользование таблицами немного усложняется, в силу необходимости выполнения некоторых вспомогательных операций (сложение, вычитание и умножение на однозначные числа; наличие арифмометра не предполагается).

В первой части статьи рассматриваются два новых типа логарифмических таблиц. Первый из них представляет семизначные таблицы десятичных логарифмов натуральных чисел от 6800 до 8500, построение которых основано на свойствах логарифмической функции. При этом таблица по возможности сокращена и обеспечена линейная интерполяция. В статье приводятся полные таблицы этого типа; вместе со вспомогательной таблицей они занимают четыре печатных страницы и позволяют вычислять десятичные логарифмы (и антилогарифмы) любых положительных чисел с точностью до $0.56 \cdot 10^{-7}$.

Второй тип семизначных логарифмических таблиц основывается на формуле

$$\lg_{10}(n+h) \approx \lg_{10} n + N \lg_{10}(-N(n) - \lg_{10} n + H(h)),$$

где $10^3 \leqslant n \leqslant 10^4$, $0 \leqslant h < 1$, $N(n) = -\lg_{10}\left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n}\right)$,

$$H(h) = \lg_{10}\lg_{10} e + \lg_{10}(h - (\sqrt{2}-1)10^{-3}(h^2 - (2\sqrt{2}-2)h)).$$

Вычисления логарифмов или антилогарифмов требуют здесь 3 сложений и 3 прочитываний вместо 2 сложений и 2 прочитываний в случае обычных таблиц. Новые таблицы в 9 раз короче обычных. В статье приводится фрагмент таких таблиц, оценивается погрешность.

Вторая часть содержит «новые общие методы» табулирования функций. Один из них, например, в случае $\sin t$ основывается на формуле

$$\sin[\alpha + (m+h)k] \approx \sin\alpha + (m+h)\frac{\Delta}{6} 10^{-7} + d_m \cdot 10^{-7} + h(d_{m+1} - d_m) 10^{-7},$$

где

$$d_m = \begin{cases} 0 \text{ для } m = 0, \\ 10^7 [\sin(\alpha + mk) - \sin\alpha] - m\frac{\Delta}{6} \end{cases}$$

и Δ — наибольшее положительное число, которое не меньше, чем $10^7[\sin(\alpha+6k)-\sin\alpha]$, и делится на 12. Числа $\sin\alpha$ и поправки $(m+h)\frac{\Delta}{6}$ табулируются отдельно. Поправка $d_m 10^{-7}+h(d_{m+1}+d_m)10^{-7}$ легко вычисляется в уме.

Второй общий метод основывается на формуле

$$x(a+hk)\approx x(a)+\varepsilon[N\lg_{10}h+A(a)]+\nu(a,\ h),$$

где k есть шаг таблицы, $\varepsilon^2=1$ и значения функции $\nu(a,\ h)$ прочитываются из номограммы. Предполагается, что $x(t)$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка.

Погрешность метода оценивается. Функция $x(t)$ соответствует $A(t)$ для $t=t_1,\ t_1+k,\ t_1+2k,\ \ldots,\ t_2$ протабулирована с точностью до 7 (соответственно до 6) значащих цифр.

На все методы приводятся примеры; в частности, рассматриваются два примера на вычисление функции Бесселя $I_0(t)$ последним методом. M. Warmus

4413. **Таблица коэффициентов для частичных сумм рядов. Хорган** (Table of coefficient for the partial summation of series. Horgan R. B.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, **10**, № 55, 156—162 (англ.)

Таблица коэффициентов $A_m(n)$ (реф. 4395) с 15 знаками после запятой для $m=4(1)10$ и $n=11(1)50(5)100(10)200(50)500(100)1000$.

Я. И. Алихашкин

4414. **Таблицы $\sin x$ и $\cos x$; $x=a\cdot10^k$ градусов, $a=1(1)9$, $k=-3(1)1$. Хорган** (Radix tables for $\sin x$ and $\cos x$, $x=a\cdot10^k$ degrees, $a=1(1)9$, $k=-3(1)1$. Horgan R. B.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, **10**, № 55, 164—166 (англ.)

Таблицы $\sin x$ и $\cos x$, где $x=0{,}001(0{,}001)0{,}01(0{,}01)0{,}1(0{,}1)1(1)10(10)90°$ (всего по 45 значений), с точностью до $0{,}6\cdot10^{-20}$ получены на СВАК (по программе вычислений с удвоенным числом знаков). Вместе с приведенными формулами для $\sin$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$ дают возможность вычислять $\sin x$ и $\cos x$ для любого $x=M\cdot10^{-3°}$ (M — целое).

М. Л. Бродский

4415. **Таблицы синусов и косинусов для радианного аргумента от 100 до 1000** (Table of sines and cosines for radian arguments between 100 and 1,000), Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 133—142 (англ.)

Приведены восьмизначные таблицы синусов и косинусов для 100 (1) 1000.

4416. **Девятизначные таблицы секанса и косеканса с шагом в одну сотую** (Table of secants and cosecants to nine significant figures at hundreths of a degree. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, **40**, 46 pp.) (англ.)

Интерполяцию рекомендуется проводить по интерполяционной формуле Лагранжа, начиная от двухточечной (линейной) в области малых значений аргумента и кончая шеститочечной близко к 90°.

В. К. Саульев

4417. **Таблица $x^n/n!$** (Table of $x^n/n!$), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 145—182 (англ.)

Приведены таблицы функции $x^n/n!$ с тринадцатью десятичными знаками для $x=0{,}01(0{,}01)1{,}99$ и $x=1(1)10$; при этом n меняется с шагом 1 от 6 до 40 в зависимости от величины x. В. К. Саульев

4418 К. **Тригонометрические функции с 7 десятичными знаками для 0°—90° через каждые 10″. Бенсон** (Natural trigonometric functions; containing the natural sine, cosine, tangent and cotangent to 7 decimal places for every 10 seconds of arc from 0° to 90° semi-quadrantly arranged. 5 th ed. Benson Robert E. Powner, 1956, 180 pp., 5 doll.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 4, 10 (англ.)

4419 К. **Таблицы умножения и деления и пр. Трибель** (Rechen-Resultate. Tab. zum Ablesen d. Resultate v. Multiplikationen und Divisionen bis $100\times1000=100\,000$ in Bruchteilen und ganzen Zahlen. Zum prakt. Gebrauch f. Stückzahl-, Lohn u. Prozentberechnungen. Rechenhilfsmittel f. alle Arten d. Rechnens mit Zahlen jeder Größe. Radizieren (Wurzelsuchen) nach vereinf. Verfahren. 8. Aufl. Triebel Franz. Berlin, Techn. Verl. Cram., 1956, 285 S., 26. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 32, 2747 (англ.)

4420 К. **Таблицы для пересчета. Пепйюнг** (Umrechnungstabellen. 6. Aufl. Pepjung Carl H. P. Bremen, Pepjung, 1956, 234 S., ill. — 15. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 34, 2417 (нем.)

4421 К. **Миллион случайных цифр и сто тысяч нормальных отклонений** (A million random digits with 100.000 normal derivates. (RAND Corp., USA) Glencoe, Ill., The Free Press, 1955, XXV, 200 pp., 10.00 doll.) (англ.)

Приводятся таблица случайных десятичных цифр и таблица нормальных отклонений, которые весьма полезны для численного решения ряда задач при помощи известных методов теории вероятности и математической статистики и особенно при помощи методов Монте-Карло.

Книга содержит следующие разделы: 1. Введение. 2. Получение случайных цифр. 3. Испытания случайных цифр. 4. Нормальные отклонения. 5. Использование таблиц. 6. Библиография. 7. Таблица случайных цифр. 8. Таблица нормальных отклонений.

Во введении отмечается, что преимуществом таблиц является их большой объем и что таблицы были изготовлены в основном для математических машин, работающих на перфокартах. Получение таблицы случайных цифр осуществлялось методом последовательного улучшения основной таблицы, получаемой с помощью электронной рулетки. В принципе электронная рулетка представляла собой колесо с 32 числами, которое делало в среднем около 3000 оборотов за одно испытание и выдавало одно случайное число в 1 секунду. Электронная рулетка имела источник случайных по частоте импульсов, который выдавал в среднем стотысяч импульсов в 1 сек., запираемых импульсами, идущими от генератора с постоянной частотой около 1 *гц*. Случайные импульсы сосчитывались и запоминались последние цифры полученных таким образом случайных чисел, которые затем пробивались на перфокартах. Окончательную таблицу случайных чисел машина приготовила за месяц работы с непрерывным контролем электрического режима, но без контроля путем испытания цифр на неслучайность. Таблица, полученная машиной, считалась удовлетворительной, когда отклонение от среднего при различных испытаниях было меньше двух процентов.

Испытания цифр таблицы на неслучайность производились тремя способами: путем проверки частот появления отдельных цифр в 1000 массивах цифр по 1000 цифр в каждом массиве, путем проверки частот появления семи возможных перестановок с одинаковыми первыми цифрами в группах из пяти цифр в 200 массивах по 5000 цифр в каждом массиве и путем проверки частот появления упорядоченных пар цифр в одном массиве из 50 000 цифр. Во всех этих способах наблюденные частоты сравнивались с ожидаемыми; вычислялось χ^2 и использовался критерий согласия;

все это подробно иллюстрируется на фактическом материале, приведенном в шести таблицах.

Сто тысяч нормальных отклонений были получены из половины случайных цифр основной таблицы путем вычисления x из уравнения

$$(D + 0{,}5) \cdot 10^{-5} = F(x),$$

где D — пятизначное случайное число основной таблицы, а $F(x)$ — функция распределения Гаусса.

Таблица нормальных отклонений также была проверена при помощи критерия согласия и результаты этой проверки приведены в таблицах 7 и 8.

Способ употребления основных таблиц иллюстрируется примерами. Библ. 11 назв. В. Я. Евфанов

См. также: 3683, 3684, 3968, 3991, 4003, 4040, 4083, 4092, 4402

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4422. Малые вычислительные машины для научных расчетов. Карр III, Перлис (Small-scale computers as scientific calculators. Carr III John W., Perlis Alan J.), Control Engng, 1956, **3**, № 3, 99—104 (англ.)

Приводится обзор и сравнение вычислительных машин, стоимость которых не превышает 200 000 долл. Такие машины авторы называют «малыми» и разбивают на три группы: «дорогие», «менее дорогие» и «настольные». При этом рассматриваются только машины с запоминаемой программой. Во всех рассматриваемых машинах в качестве оперативного запоминающего устройства применяется магнитный барабан. Кроме таблицы основных характеристик машин (см. табл. на стр. 144), приводится таблица характеристик запоминающих устройств на магнитной ленте для «малых» машин и таблица операций «малых машин».

Примечания:

1. Арендная плата указана для машин с объемом запоминающего устройства 1000 и 2000 чисел соответственно.

2. Арендная плата указана при аренде на 5 лет и на один год с включением блока магнитных лент.

3. Цена указана на машины с объемом запоминающего устройства на 1024 и 4096 кодов соответственно.

4. За указанную цену фирма 1 год обслуживает машину своими силами.

5. В арендную плату входит стоимость обслуживания.

6. За указанную арендную плату к машине придается лентопротяжной механизм.

7. В объем внутреннего запоминающего устройства иногда входит регенеративная петля с малым временем выбора.

8. Стандартной операцией считается вычисление, следующих трех выражений: $A + B = C, C + D + E = F$, $G \times H = J$. Это компенсирует различие в количестве адресов в командах машин.

9. Оптимальное программирование действительно только для машин с командами типа $1 + 1$ и $2 + 1$.

10. Относительно высокие скорости машины «Datatron» достигнуты помещением чисел и команд в быстродействующее запоминающее устройство на 80 кодов.

11. Указанная скорость достигается разделением кода на 4 части и выбором команд из оперативного запоминающего устройства емкостью 64 кода.

12. В машинах $E=10^1$ «Monrobot» и «Elecom-50» команды и константы находятся в разных запоминающих устройствах.

13. Программирование для G — 15A настолько непохоже на нормальное или программирование с минимальным временем выбора, что обычного сравнения сделать нельзя. По-видимому, для случая сложного программирования приемлем коэффициент 2 или 3.

14. Знак * относится к дополнительному оборудованию (в основном перфокартному оборудованию *IBM*), увеличивающему стоимость машин на 10 000—20 000 долл. и повышающему арендную плату, которая для устройств *IBM* 024 и 523 составляет 30 и 65 долл. в месяц соответственно.

15. В E-101 ввод данных производится с клавиатуры, а инструкций — со штеккерного коммутатора. Кроме того, данные могут читаться с перфоленты со скоростью 10 знаков в 1 сек.

16. В «Elecom 50» ввод данных производится с клавиатуры, а команд — с металлизированной ленты.

А. И. Щуров

4423. Быстродействующая электронная вычислительная машина М-2. Брук И. С., Электричество, 1956, № 9, 14—23

Подробно описывается электронная цифровая вычислительная машина М-2, созданная лабораторией управляющих машин и систем АН СССР. Изготовление и монтаж машины М-2 были закончены к декабрю 1952 г. В конце 1954 г. схема М-2 подверглась модернизации, после чего машина была введена в нормальную эксплуатацию.

Машина М-2 имеет немногим более 1600 электронных ламп и выполняет до 3000 арифметических действий в 1 сек. с девятизначными числами. М-2 имеет внутреннее (оперативное) запоминающее устройство на обыкновенных электроннолучевых трубках типа 13Л037 емкостью 512 34-разрядных чисел. Кроме того, М-2 имеет запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 512 ячеек, которое используется также в качестве оперативного. Внешним запоминающим устройством является магнитная лента. Емкость ее 50 000 чисел.

Исходные данные вводятся с телеграфной пятидырочной перфоленты при помощи фототрансмиттера со скоростью протяжки ленты 1 *м/сек*. Имеется также и обычный электромеханический телеграфный трансмиттер. Кроме того, можно осуществлять ввод при помощи клавишного устройства. Результаты вычислений печатаются телетайпом со скоростью 1 число в 2 сек.

Используется двоичная система представления чисел для всех операций внутри машины.

Представление чисел двоякое — с «плавающей запятой» и с «фиксированной запятой». При представлении чисел с «плавающей запятой» мантисса занимает 28 двоичных разрядов, из которых один — разряд ее алгебраического знака, другой — разряд целых, содержащий всегда «0». Числа должны быть нормализованы, т. е. заключены в пределах ± 1, $\pm 1/2$. Порядок занимает 6 разрядов.

Вводить числа в машину можно как в двоичной системе, так и десятичной (бинарно-кодированной.) Вывод также возможен в двух системах, причем бинарно-кодированные числа переводятся в десятичные телетайпом.

Система программирования трехадресная. Инструкция состоит из 3 адресов (по 10 двоичных разрядов

Машина	Цена в долл.	Месячная арендная плата в долл. (прим. 5)	Число ламп и диодов	Потребляемая мощность и требования к охлаждению	Кол-во ячеек во внутреннем запоминающем устройстве (прим. 7)	Среднее время обращения, в мсек.	Число адресов в команде	Чис разр до в ко
IBM-650		3250 3750 (прим. 1)	220 ламп, 4000 диодов	16 *квт* внешнего охлаждения не требуется, но рекомендуется кондиционирование воздуха	1000 или 2000	2,4	1+1	10
102 d	99 500	2400 4100 (прим. 2)	300 ламп, 4000 диодов	6 *квт*. Рекомендуется кондиционирование воздуха	1024 / +8	12,5 / 1,5	3	10
Datatron	136 000	4333	1200 ламп, 3000 диодов	13 *квт*. Рекомендуется кондиционирование воздуха	4000 / +80	8,5 / 0,85	1	10
Miniac	100 000		700 ламп, 1500 диодов	4 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	4097 / +256	5 / 1,25	1	10
Elecom 125	97 000	3500 (прим. 6)	350 ламп, 4000 диодов	7 *квт*. Рекомендуется кондиционирование воздуха в помещении	от 1 до 10000 / от 10 до 100	8,25 / 1,8	2	10
Circle	57 000 78 000 (прим. 3)		700 ламп на 18 отдельных шасси	3,5 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	1024	8,5	1	40
Bendix G 15 A	45 000	(прим. 13)	400 ламп, 2800 диодов	3 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	2176 / +4	29 / 0,6	2+1	29
Readix	79 000		260 ламп, 3040 диодов	5 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	4000 / +160	9,0	1	10
Librascope LGP-30					4096 (с перекрещиванием)	9	1	32
Monrobot	75 000		650 ламп, 200 диодов	Внешнего охлаждения не требуется	100 чисел 100 команд (прим. 12)	16	4	20
E-101	32 500 (прим. 4)	850	160 ламп, 1500 диодов	3 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	128 команд (штекерный коммутатор) 100 чисел	9	1	12
Elecom 50	17 000		1600 ламп, 2000 диодов	2 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	2400 команд (металлизированная лента) 100 чисел	35	1	10
Alwac	60 000		280 ламп, 5000 диодов	5 *квт*. Внешнего охлаждения не требуется	4096 / +128	25 / 4,2	1+1	32

Система представления чисел	Скорость вычислений в стандартн. опер. в 1 сек. (прим. 8)		Скорость ввода в знаках в 1 сек.			Скорость вывода в знаках в 1 сек.	
	При обычном программировании	При оптимальном программировании (прим. 9)	Телеграфное оборудование	Перфокарты (прим. 14)	Фотоэлектрическое читающее устройство	Телеграфное оборудование	Перфокарты и устройство печати
сятичная	22	33		200 перфокарт в 1 мин., 265 знаков в 1 сек.			100 перфокарт в 1 мин., 132 знака в 1 сек.
сятичная	16		10 знаков		200 знаков	10 знаков	132 знака с IBM 532
сятичная	50 (прим. 10)		10 знаков	*150 знаков с IBM-513, 514, 515, 523, 300 знаков всех с IBM-528	540 знаков	10 знаков (телетайп), 14 знаков (перфоратор)	150 знаков с IBM-513, 514, 517, 523, 528
сятично-двоичная	12—20		10 знаков		1000 знаков	10 знаков	За дополнительную стоимость придается устройство печати в строку
сятичная	13—20 (с фиксированной или плавающей запятой)		10 знаков, 60 знаков (перфорация)	*20 знаков с IBM-024, 150 знаков с IBM-523	200—400 знаков	10 знаков	150 знаков с IBM-523
двоичная	8		10 знаков	150 знаков с IBM-523		10 знаков	150 знаков с IBM-523
двоичная	7.5		10 знаков			10 знаков	
двоичная	10		15 знаков		200 знаков	10 знаков (телетайп), 15 знаков (перфоратор)	
есятичная	8,0		10 знаков	*100 перфокарт в 1 мин.	переменная	10 знаков	*100 перфокарт в мин.
двоичная	11—20		10 знаков			10 знаков	
есятичная	1		10 знаков			10 знаков	
есятичная есятичная	2 15		В машинах *E*-101 и Elecom 50 для ввода и вывода данных используются счетные машинки. Команды вводятся со штеккерного коммутатора или металлизированной ленты (см. прим. 12, 15 и 16)				
двоичная	8	15 (прим. 11)	10 знаков	150 знаков с IBM-523		10 знаков	150 знаков с IBM-523

каждый) и кода операции (4 разряда). Всего машина может выполнять 20 различных операций: 4 арифметических действия для чисел с «фиксированной запятой» и для чисел с «плавающей запятой»; умножение с выводом младших разрядов (двойная точность); деление с выводом остатка; логическое умножение, сравнение, «ввод» и «вывод»; операции для работы с магнитной лентой и др. Поскольку для кода операций отводится 4 двоичных разряда, т. е. можно закодировать только 16 операций, то для увеличения количества операций в машине предусмотрена особая операция «переключение». Так, например, при коде «переключение» в зависимости от того, что указано во 2-м адресе, осуществляется переход с «плавающей запятой» на «фиксированную» и наоборот. При выполнении операции «ввод» число помещается в ячейку запоминающего устройства, указанную во втором адресе инструкции. При вводе с магнитной ленты группа из 16 чисел записывается на 16 адресов запоминающего устройства, начиная с адреса, указанного в инструкции. После этого лента останавливается. Можно ввести сразу 512 чисел или любое количество, меньшее 512, но только так, чтобы заполнились последние адреса электростатического запоминающего устройства. Аналогично происходит и вывод на магнитную ленту. Предусмотрена операция «перемотка» магнитной ленты. Перемотка осуществляется вперед или назад.

Элементы машины М-2 выполнены в виде взаимозаменяемых субблоков со штепсельными разъемами, в большей части трехламповых. Арифметическое устройство машины состоит из 3 основных регистров (A, B и C) и одного вспомогательного (E). Первые 6 старших разрядов регистров A, B и C используются для порядков чисел, остальные для мантиссы. Связь с внутренним и внешним запоминающим устройством осуществляется при помощи регистра A. Числа передаются параллельно — при связи с внутренними запоминающими устройствами, а при связи с внешним запоминающим устройством — последовательно.

В статье представлена блок-схема машины М-2, принципиальные схемы отдельных элементов, блок-схема одного разряда арифметического узла, блок-схема электростатического запоминающего устройства. Помещены так же фотографии общего вида машины, пульта управления, устройств ввода, а также фотографии стандартных субблоков машины, ячейки электронной трубки. Г. С. Горячева

4424. Электронная вычислительная машина УНИВАК-II (Electronic computers. The Univac II), Office Equipm. Ind., 1956, March, 36—38 (англ.)

УНИВАК-II представляет собой значительно измененный и улучшенный вариант ранее выпускаемой машины УНИВАК-I. Вместо ртутных трубок в запоминающем устройстве используются магнитные сердечники. Емкость оперативного запоминающего устройства увеличена с 1000 до 2000 чисел. Время выбора одного числа уменьшено в 10 раз по сравнению с максимальным временем выбора в старом запоминающем устройстве. Отмечается большая устойчивость работы запоминающего устройства. В случае необходимости емкость оперативного запоминающего устройства легко может быть увеличена до 10 000 чисел. Результаты вычислений печатаются на высокоскоростном печатающем устройстве со скоростью 7800 знаков в 1 мин. Кроме того, на машине установлены дополнительные устройства для обработки информации такие, как устройство для печати данных с магнитной ленты, для записи данных на магнитную ленту и т. д. При переходе от УНИВАК-I к УНИВАК-II логика машины и программирование для нее не изменились. Отмечается, что УНИВАК-II самая большая и высокоскоростная машина, используемая для коммерческих расчетов. З. Д. Доброхотова

4425. Инженерные проблемы, решенные на УНИВАК. К а ц (Engineering problems solved on the UNIVAC. K a t z A r t h u r A.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953. Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 129—137, discuss. 138 (англ.)

Подробно описываются типовые задачи, решенные на машине УНИВАК. Проводится сравнение эффективности ручного счета и счета на машине, с учетом времени на анализ уравнений, составление и проверку программы. Указывается, что поскольку в инженерной практике часто производятся расчеты многих вариантов одной типовой задачи, то в этом случае эффективность счета на машине значительно повышается. На машине решались системы дифференциальных уравнений в частных производных, обращения матриц до 300-го порядка и ряд других задач.

Дается таблица времени и точности обращения матриц различных порядков (от 40 до 190). На обращение матриц составлена типовая программа, которая входит в библиотеку стандартных программ, составленных для этой машины. Указывается на высокую надежность работы машины благодаря наличию 2 параллельно работающих арифметических устройств. З. Д. Доброхотова

4426. Машина Института Паскаля. К у ф ф и н ь я л ь (La machine de l'Institut Blaise Pascal. C o u f f i g n a l L.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 1953, **37**, 55—62, Discuss. 113—115, 210, 347—354 (франц.)

Дается описание цифровой электронной вычислительной машины ИБП (IBP), строящейся в Вычислительном институте Блеза Паскаля (l'Institut de Calcul Blaise Pascal). Машина проектируется и строится обществом Логабакс (Société Logabax) в Париже.

ИБП является параллельной машиной и будет установлена в Лаборатории механических вычислений Института.

Машина выполняет следующие арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Арифметический узел машины состоит из трех триггерных регистров. Приведена схема одного разряда сумматора. Перенос в старшие разряды осуществляется с помощью линии задержки.

Запоминающее устройство построено на газоразрядных диодах. Время обращения к запоминающему устройству составляет 1 мксек. Запоминающее устройство очень громоздко. Поэтому в машине будет предусмотрено медленное запоминающее устройство, вероятно на магнитном барабане. Приведена схема запоминающего устройства.

Устройство ввода оптическое. На окружности диска, диаметром ≈ 40 *см* помещена пленка с закодированной информацией. На одном диске помещается до 750 инструкций. Каждая программа наносится на отдельный диск, который хранится в дискотеке. Константы закоммутированы в машине и вводятся с помощью переключателей. Печатающее устройство находится в стадии разработки.

В Институте находится действующий макет машины, который выполняет все операции, предусмотренные в окончательном варианте машины. Макет отличается от него лишь емкостью запоминающего устройства и количеством разрядов арифметического устройства.

Приведены фотографии диска для ввода данных и общий вид макета машины. В. П. Кузнецова

4427. Ряд схем с полупроводниковыми триодами для асинхронных вычислительных машин с прямыми связями. К у д л и ч (A set of transistor circuits

for asynchronous, direct-coupled computers. Kudlich R. A.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 124—129 (англ.)

Исследуются схемы триггера с двумя точечными полупроводниковыми триодами, имеющими N-образные входные характеристики, а также цепи выдачи и приема числа с плоскостными триодами. Приведен расчет триггера на основании линейной аппроксимации N-образной характеристики с учетом допусков на параметры триодов и на внешние параметры схемы, а также на питающие напряжения. Приведены предельные значения параметров триодов в запоминающей ячейке, полученные при экспериментальной проверке. Время переброса триггера составляет от 1 до 3 мксек. Логические схемы «и» и «или» — диодные; схема «нет» выполнена в двух вариантах (оба варианта приводятся) с плоскостным триодом. Все логические схемы рассчитывались на наихудшие уровни сигналов от триггера. Схема «нет» одновременно выполняла роль усилителя сигналов для восстановления их величины после затухания и в других логических схемах.

Испытывался трехразрядный макет асинхронного сдвигающего регистра, блок-схема которого приводится. Испытания показали, что сдвиг выполнялся без сбоев лишь в течение 2 час. Низкая устойчивость получилась за счет того, что характеристики триодов не оставались неизменными при работе. Схемы могут быть практически применимыми только при наличии четкой N-образной характеристики точечного триода и соответствия параметров триода при работе его паспортным данным (что не всегда выполняется).

В. К. Зейденберг

4428. Система скоростного кодирования для ИБМ-701. Баккус (The IBM 701 speedcoding system. Backus J. W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, 1, № 1, 4—6 (англ.)

Система «скоростного кодирования», разработанная в Нью-Йоркском научном вычислительном центре фирмы ИБМ для вычислительной машины ИБМ-701, представляет собой совокупность команд, интерпретирующих работу трехадресной машины с плавающей, занятой с некоторыми дополнениями. Несмотря на большое снижение скорости, эта система значительно уменьшает время на программирование и отладку, так что общее время подготовки и решения задачи может быть меньше, чем при обычном программировании, но главной причиной применения этой системы является ее экономичность при решении многих задач, получающаяся из-за уменьшения стоимости программирования и отладки, которая, как указывает автор, составляет обычно 50—70% стоимости эксплуатации вычислительной машины.

Каждая команда этой системы имеет два вида кодов операций: OP_1 OP_2. К кодам вида OP_1 относятся три адреса A, B и C и они всегда определяют арифметические операции с числами с плавающей запятой или операции ввода-вывода. К кодам вида OP_2 относится один адрес D, и они определяют логические операции с командами. В коды OP_1 входят обычные арифметические операции, дополненные операциями вычисления квадратного корня, синуса, арктангенса, логарифма, показательной функции и операций ввода-вывода с автоматическим контролем правильности передачи. Адреса A, B и C во время выполнения программы могут определяться как относительные. Содержимое трех специальных регистров R_A, R_B, R_C в этом случае будет указывать, как нужно изменить тот или иной адрес, записанный в инструкции. Операции OP_2 выполняются после операций OP_1 и могут определять условную или безусловную передачу управления, модификацию адресов и такой вид контроля, при котором все команды, находящиеся между двумя специальными операциями из OP_2 («начало контроля» и «конец контроля»), автоматически повторяются (как блок чисел), образующиеся при этом контрольные суммы сравниваются и при совпадении выполняется команда, следующая за операцией «конец контроля».

Среднее время выполнения операций в системе составляет: сложение 4,2 мсек.; умножение 3,5 мсек.; ввод с ленты 14 мсек. на ожидание плюс 1,6 мсек. на каждое слово; передача управления 0,77 мсек.

При отладке программы оказывается полезным специальный код, допускающий три значения, имеющийся в каждой команде и связанный с тумблерами на пульте оператора, с помощью которых можно управлять печатью помеченных команд и текущего содержимого R-регистров. Команды печатаются в таком же виде, в каком они записываются на программных бланках.

С помощью этой системы решались задачи, потребовавшие от 3 мин. до 100 час. машинного времени. Как указывается, описанная система особенно ценна при решении небольших задач. В. И. Смирнов

4429. Теория информации в применении к цифровым вычислительным машинам. Лифер, Блакман (Communication theory in digital systems. Lefer M., Blachman N. M.), Control Engng, 1956, 3, № 1, 72—77 (англ.)

Кратко излагаются основные положения теории информации и приводятся формулы количества информации и пропускной способности канала. Рассматривается применение теории информации для эффективного проектирования и использования цифровых вычислительных машин. В частности, применение оптимального кодирования позволяет значительно уменьшить емкость запоминающих устройств без ущерба для работы машины, а также увеличить ее пропускную способность. Исследуются ошибки, возникающие благодаря дискретному характеру информации и квантованию величин, так называемые ошибки дискретности и округления, и их влияние на потерю информации в процессе вычислений. Указывается, что наличие ошибок округления ограничивает точность окончательного результата таким же образом, как и уровень шумов ограничивает пропускную способность системы связи. Рассматривается конструкция цифровых вычислительных машин с точки зрения улучшения отношения сигнала к уровню шумов.

Подчеркивается, что цифровое вычислительное устройство не создает новой информации, а наоборот, теряет часть ее в процессе передачи и вычислений.

Б. И. Стрелков

4430. Стандартизация связи с вычислительными машинами. Грош (Standardization of computer intercommunication. Grosch H. R. J.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 87—89. Discuss., 89 (англ.)

Указывается, что в настоящее время, в целях максимального использования машинного времени, возникают проблемы передачи информаций вычислительным машинам на значительные расстояния. В связи с этим необходимо стандартизовать передающее и принимающее оборудование, перфорирующие механизмы, ширину бумажной ленты, количество каналов магнитной ленты, считывающие головки и др., а также кодировку передаваемой информации. Отмечается, что в результате развития и усовершенствования машин изменяется их логическое построение, что в свою очередь вызывает необходимость изменения системы программирования. В связи с этим автор считает необходимым создание псевдоязыка машин, который позволил бы не переделывать программ при изменении кода и логики машины. Отмечается, что эту проблему

необходимо решить в первую очередь для коммерческих программ. З. Д. Доброхотова

4431. Вычислительная машина Марк IV. Эйкен (Le calculateur Mark IV. Aiken H. H.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient 1953, **37**, 11—28, Discuss. 113—115, 210, 347—354 (франц.)

Дается подробное описание последовательной вычислительной машины Марк IV (РЖМат, 1954, 1434; 1955, 475). Внутреннее запоминающее устройство на 200 чисел выполнено на магнитных сердечниках, из пермаворма, имеющих прямоугольную петлю гистерезиса. Внешнее запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане. Емкость барабана 4000 чисел и 10 000 инструкций. Диаметр барабана 55 *см*, высота 80 *см*. Описана конструкция записывающих и считывающих головок. В машине, кроме того, имеется 12 блоков магнитной ленты. В статье приведена таблица скорости выполнения различных операций. Сложение двух шестнадцатиразрядных десятичных чисел выполняется за 1 мсек, сложение двух чисел с удвоенным количеством разрядов — за 6 мсек. Умножение соответственно выполняется за 10 мсек и 75 мсек. Деление — за 22 мсек и 165 мсек. И. А. Зарубин

4432. Общая система обработки буквенно-цифровой информации на вычислительной машине ИБМ-701. Браккен, Олдфильд (A general system for handling alphameric information on the IBM 701 computer. Bracken Robert H., Oldfield Bruce G.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 175—180 (англ.)

Вычислительная машина ИБМ-701, установленная на испытательной станции морской артиллерии, предназначена в первую очередь для научных и технических вычислений, однако в последний год стало весьма желательным использовать ее и для решения задач хозяйственного управления. Для использования машины в решении возможно большего круга задач управления была организована общая система обработки больших количеств буквенно-цифровых данных на ИБМ-701, специально не приспособленной для такого рода работы.

Эта система состоит из набора основных подпрограмм, выполняющих специфические операции, связанные с обработкой буквенно-цифровой информации, и набора программ более общего назначения, построенных на основе указанных подпрограмм и выполняющих некоторые операции, часто встречающиеся при решении задач управления. При этом предполагается вполне определенное представление цифровой и буквенной информации, правила кодировки которой приведены. Перечисляются имеющиеся подпрограммы и программы общего назначения и кратко описывается их функциональное назначение. В дальнейшем предполагается накапливать библиотеку как подпрограмм, так и программ, а также использовать вспомогательное оборудование для перевода данных с перфокарт на магнитную ленту и с магнитной ленты на печать, что значительно повысит эффективность системы за счет сокращения машинного времени. В. И. Смирнов

4433. Экспериментирование с помощью цифровой системы для обработки данных. Шарп (Experiences with automatic digital data processing. Sharp Elmer M.), Amer. Docum., 1956, **7**, № 1, 22—28 (англ.)

Описывается использование электронного множительного перфоратора ИБМ-604 и другого перфорационного оборудования фирмы ИБМ в лаборатории Льюиса при Национальном консультативном комитете по аэронавтике в Кливленде для разработки и исследования авиационных двигателей.

Основной проблемой, возникающей при проектировании двигателя, является необходимость выполнения большого количества измерений давления и температуры и представление данных измерений в форме, удобной для использования в применяющемся цифровом оборудовании.

Описывается специально разработанное для этой цели устройство для преобразования в цифровую форму давления в различных точках двигателя и записи данных измерений на магнитной ленте. Приводится блок-схема этого устройства.

В качестве преобразователя в цифровую форму температур, представленных в виде электрического напряжения, используется специально разработанный цифровой милливольтметр. Полученные на этих устройствах данные обрабатываются на ИБМ-604.

Б. И. Стрелков

4434. Вычислительные машины фирмы ИБМ. Лида (IBM computing machines. Lida S. L.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan., 1953, Kansas City, Mo., Widwest Res. Inst., 1953, 52—64 (англ.)

Кратко рассматривается история создания автоматических вычислительных машин фирмой ИБМ. Описывается электронный множительный перфоратор ИБМ-604 (РЖМат, 1954, 1439), система КПК (CPC) для обработки цифровых данных, построенная на базе машины ИБМ-604, дополнительного запоминающего устройства ИБМ-941 и ряда перфокартных внешних устройств. Описывается электронная вычислительная машина ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 2375, 2376).

З. Д. Доброхотова

4435. Вычислительные машины в Окридже. Бердетт (Computers at Oak Ridge. Burdette Earl W.), ISA Journal, 1955, **2**, № 2, 42—44 (англ.)

Дается краткий обзор истории развития вычислительной техники и описание основных областей применения электронных вычислительных машин. Подробно рассматривается использование электронных машин в Национальной лаборатории в Окридже. Для управления реактором используется моделирующее устройство. Устройство включает в себя 15 операционных усилителей и блоки перемножения. На устройстве решаются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Данные на моделирующее устройство поступают с электрической модели реактора, построенной на основе синтеза электрической системы, описываемой такими же уравнениями, что и процессы в реакторе. Модель образует электрические аналогии температуры реактора, запаздывающих нейтронов, рабочей радиоактивности и температуры пара. В лаборатории имеется цифровая электронная вычислительная машина СПЭК (SPEC) (РЖМат, 1954, 1428) специального назначения для решения систем линейных уравнений и обращения матриц до 300-го порядка. Машина десятичная, с фиксированной запятой. Для научных целей используется большая цифровая вычислительная машина ОРАКЛЕ (ORACLE) (РЖМат, 1954, 4936, 4937, 4938; 1955, 991). З. Д. Доброхотова

4436. Некоторые задачи, решавшиеся на машине БАРК. Челъберг (Quelques problèmes traités avec le BARK. Kjellberg G.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 319—328, Discuss. 347—354 (франц.)

Описывается конструкция шведской релейной вычислительной машины БАРК (BARK), которая была принята в эксплуатацию с 1 июля 1950 г. и последовательно усовершенствовалась до декабря 1952 г. Машина построена почти исключительно на стандартных элементах автоматической телефонии, что сильно удешевило ее изготовление.

В 1950 г. стоимость машины составляла 400 000 шведских крон, в 1951 г., в связи с ее расширением, капиталовложения возросли до 600 000 крон. При этом арендная плата за пользование машиной составляла 50 крон в час.

Основным решающим и запоминающим элементом машины является обычное реле телефонного типа. Число таких реле, равнявшееся первоначально 5200, в январе 1951 г. возросло до 8000. Емкость памяти: 50 переменных величин и 100 констант (в январе 1951 г. — 100 переменных и 200 констант). Машина оперирует с двоичными числами в нормальной форме (24-разрядная мантисса и 6 разрядов порядка). С учетом знаков мантиссы и порядка это составляет 32 двоичных разряда. Ввод и вывод данных осуществляется с помощью 7 телеграфных трансмиттеров и 7 перфораторов. Кроме того, имеется одно печатающее устройство.

Машина выполняет перенос за 100 мсек., сложение за 200 мсек. и умножение за 300 мсек. Кроме того, может выполнять такие операции, как сдвиг, выделение мантиссы и порядка, логическое умножение и сложение и т. д. Система команд в машине — 4-адресная. Команды задаются на 5 штеккерных панелях: 3-адресных, панели операций и знаков и панели переходов.

Устройство управления содержит 4 дешифратора на 64 выхода каждый, построенных на реле по обычной схеме пирамиды. Кроме того, имеется ряд отдельных реле, соединенных непосредственно с панелями управления. Устройство позволяет выполнять до 1200 неповторяющихся команд, что, с учетом возможности условных и безусловных переходов, позволяет программировать и решать самые сложные задачи.

В качестве примера возможностей машины освещены методы решения и контроля некоторых задач. Уравнение $y'' + \left(1 - \frac{2a}{x}\right) = 0$ при $y(0) \neq 0$ решалось на машине 3 различными способами (двумя итеративными и путем разложения в ряд Тейлора до 7-го порядка). Наибольшую точность (порядка h^8, где h — интервал разбиения) и удобство контроля дало разложение в ряд Тейлора, причем расчет примерно 3000 значений y и y' занял 42 часа машинного времени.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (до 41 порядка) и инвертирование матриц выполнялось на машине методами Джордана и Гаусса. Для матриц 20-го порядка и решения по методу Гаусса эти задачи занимали соответственно 1,2 и 2,5 часа машинного времени, по методу Джордана 1,7 и 3,5 часа.

Приводятся фотографии машины и схемы дешифратора и панелей управления. А. А. Крупский

4437. Электронная вычислительная машина АКЕ. Колбрук (Le modèle pilote du calculateur automatique électronique arithmètique (ACE) du N. P. L. Colebrook F. M.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient, 1953, **37**, 65—72, Discuss. 113—115, 210 (франц.)

Описана электронная цифровая машина АКЕ (РЖМат, 1955, 3451, 3452) последовательного действия, работающая на частоте 1 *мгц*. Длина кода машины составляет 32 двоичных разряда. Запоминающее устройство состоит из 8 ртутных линий задержки. Емкость каждой трубки 32 кода. Сложение и вычитание без учета времени выбора производятся за 32 мксек. Умножение происходит за 2 мсек. Данные вводятся в машину с перфокарт. Результаты выводятся также на перфокарты, которые затем обрабатываются на печатающем устройстве. Ввод и вывод данных производится со скоростью 100 чисел в 1 мин. И. А. Зарубин

4438. Использование электронной вычислительной машины фирмой «Дженерал Электрик» (The G.E.C. Electronic Computer Service), Process Control and Automat., 1956, **3**, № 4, 135 (англ.)

Сообщается, что фирмой «Дженерал Электрик» для выполнения вычислительных работ, связанных с деятельностью фирмы, в исследовательских лабораториях в Вимблее (Wembly) организована специальная вычислительная группа, оснащенная машиной «Холлерит (Hollerith Hec 2M) фирмы «Бритиш Табьюлейтинг мэшин». Группа проделала большую вычислительную работу по статистической обработке данных об электронных лампах, по конструированию многожильных кабелей на минимальные перекрестные искажения и т. д. Подчеркивается большой экономический эффект от применения электронных вычислительных машин вместо настольных счетных машин. А. И. Щуров

4439. Электронная рулетка для применения метода Монте-Карло в ядерной физике. Таррат с, Рака, Климент (Una ruleta electronica para aplicacion del metode de Monte-Carlo a fisica-nuclear. Tharrats J. M., Roca J. L., Climent V. H.), Suppl. Nuovo cimento, 1954, **11**, ser. 9, № 3, 451—479 (исп.)

Описывается устройство и действие так называемых электронных рулеток. Электронными рулетками авторы называют электронные устройства, которые выдают последовательности случайных чисел. Описываемые электронные рулетки классифицируются на рулетки простого и сложного типа в зависимости от того, выдают ли они последовательности случайных чисел в результате использования одного или нескольких случайных физических процессов.

Авторы описывают простые электронные рулетки двух типов: простую электронную рулетку гауссовского типа и простую электронную рулетку экспоненциального типа.

Простая электронная рулетка гауссовского типа состоит из гейгеровского счетчика, дискриминатора, десятичного счетчика, низкочастотного генератора импульсов и блокирующего устройства.

Десятичный счетчик через дискриминатор подвергается воздействию импульсов от счетчика Гейгера, а блокирующее устройство при помощи импульсов от генератора периодически на время $\Delta t = 1$ сек. прекращает передачу импульсов на десятичный счетчик. Каждый раз, когда это происходит, состояние десятичного счетчика в течение времени Δt остается неизменным, т. е. в счетчике хранится случайное число. Эта рулетка дает последовательности случайных чисел, распределенных по гауссовскому закону:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где x — некоторое число импульсов, сосчитанное рулеткой за время, в течение которого открыт десятичный счетчик, $p_X(x)$ — вероятность получения какого-либо фиксированного числа в рулетке, X — среднее число импульсов, сосчитанное между двумя последовательными отсечками.

Простая электронная рулетка экспоненциального типа состоит из тех же блоков, что и электронная рулетка гауссовского типа, но связь между ними такова, что импульсы от высокочастотного генератора прерываются импульсами от гейгеровского счетчика, которые посылаются с небольшей частотой (от фоновой загрузки счетчика). Электронная рулетка экспоненциального типа дает последовательности случайных чисел с плотностью вероятности

$$p(t) = T^{-1} e^{-\frac{t}{T}}$$

где t — число периодических импульсов, которые прерываются импульсами от гейгеровского счетчика на различные интервалы времени Δt, а $T = \sqrt{\overline{t^2}}$.

Основной целью работы является сложная электронная рулетка типа 2PA, которая выполнена как в виде модели с записью случайных цифр оператором, так и в виде модели с автоматической их записью. Доказывается, что у таких электронных рулеток отсутствует повторяемость и что они выдают серии абсолютно случайных чисел, распределенных по закону:

$$p(x, t) = p(x)\,p(t) = \frac{1}{T\sqrt{2\pi X t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{T}\right).$$

В электронных рулетках типа 2PA импульсы, поступающие на десятичный счетчик, и редкие импульсы (от фоновой загрузки гейгеровского счетчика), которые блокируют десятичный счетчик на время Δt, получаются от гейгеровских счетчиков.

Модель 2PA с автоматической регистрацией случайных чисел отличается от модели с записью вручную дополнительным устройством, которое позволяет печатать выдаваемые случайные числа и автоматически подсчитывать частоту появления каждого случайного числа и общее количество выданных случайных чисел, что необходимо для непрерывной проверки правильности ее работы. Предусмотрена выдача случайных чисел путем пробивки их на перфоленту, что особенно удобно при использовании выдаваемых чисел на быстродействующей электронной машине.

Рулетка 2PA с записью случайных чисел оператором дает возможность получить один миллион случайных чисел за три месяца односменной работы, а та же рулетка с автоматической их записью выдает один миллион чисел за 20 рабочих дней. Авторы отмечают, что описанные электронные рулетки работают надежно и устойчиво. В. Я. Евфанов

4440. Триггер в качестве датчика случайных двоичных цифр. Павляк (Flip-flop as generator of random binary digits. Pawlak Z.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 53, 28—30 (англ.)

Сообщается о возможности использования триггера в качестве датчика случайных цифр в двоичной системе счисления. Приводится принципиальная схема триггера, собранного на лампе 6 SN 7, и теоретически доказывается, что получаемые при запуске от ключа цифры в сериях случайных двоичных чисел равновероятны в предположении, что триггер не изменяет своих свойств в течение двух последовательных замыканий контакта ключа. Одно из двух различных состояний A и B триггера получается при замыкании контакта для подачи анодного напряжения + 200 $в$.

Авторы указывают, что описанный способ может быть использован для получения двоичных случайных чисел в автоматических электронных машинах, если подачей напряжения на триггер будет автоматически управлять электронный выключатель. В. Я. Евфанов

4441. Цифровые вычислительные машины в Восточной Европе. Хаусхолдер (Digital computers in Eastern Europe. Householder Alston S.), Computers and Automat., 1955, 4, № 12, 8—9, 31 (англ.)

Отчет о Дармштадтской конференции по электронным цифровым машинам и обработке информации (25—28 октября 1955 г.), в которой приняло участие около 600 чел. Сообщаются подробные данные советских машин «БЭСМ» и «Урал», по которым на конференцию были представлены тексты докладов. Приведены весьма краткие сведения о работах по вычислительной технике в Чехословакии, Германии (ГДР и ФРГ), Швеции и некоторых других странах. Е. И. Мамонов

4442. Электронные машины фирмы «ИБМ» для обработки данных на Среднем Западе. Макдоналд (IBM electronic data processing operations in the Midwest. Macdonald Neil D.), Computers and Automat., 1956, 5, № 8, 16—19, 36 (англ.)

Подробно освещаются вопросы внедрения электронной вычислительной техники для автоматизации обработки коммерческих данных. Приводятся статистические данные о количестве используемых машин и о роде выполняемой ими работы в различных компаниях, учреждениях и институтах Среднего Запада. Данные касаются машин фирмы «ИБМ» типа 701, 702, 704, 705 и 650. З. Д. Доброхотова

4443. Открытие вычислительного центра в Мюнхенской высшей технической школе. Зауэр (Eröffnung des Rechenzentrums der Technischen Hochschule München. Sauer R.), MTW-Mitt., 1956, 3, № 4, 176—177 (нем.)

Сообщается, что 8 мая 1956 г. в Мюнхенской высшей технической школе открылся вычислительный центр на базе цифровой электронной вычислительной машины ПЕРМ. Г. С. Горячева

4444. Требования к вычислительным машинам для управления производством и инвентарной проверки. Ларсон, Важоньи (Data-processor requirements in production and inventory control. Larson H. T., Vazsonyi A.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 48—61 (англ.)

Электронные вычислительные устройства для управления производством стали применяться сравнительно недавно. Это объясняется значительными трудностями, возникающими вследствие наличия большого количества данных о деталях при постоянном изменении режима их обработки, а также вследствие достаточной сложности эксплуатации электронных вычислительных устройств. Автор считает, что в настоящее время необходимо: 1) оценить характеристики вычислительных машин, необходимых для управления производством; 2) разрабатывать новые научные методы и специальные математические модели для описания и анализа производства.

Статья состоит из двух частей. В первой части приводится схема выполнения вычислительных операций, на которой должно быть основано построение подобного вычислительного устройства. Во второй части описывается порядок выполнения вычислительных операций и для нескольких конкретных примеров оценивается размер требующейся вычислительной работы, исходя из чего определяются требования к соответствующему вычислительному устройству.

Исходные данные для вычислений содержат чертежи какого-либо узла или изделия. Число таких чертежей на заводе может доходить до нескольких тысяч. Далее в зависимости от операций по обработке деталей и последовательности их выполнения можно найти время, необходимое на обработку всего изделия. Перед вычислениями составляется таблица, с помощью которой по определенному закону, исходя из производственных условий, вычисляются режимы и последовательность обработки деталей.

На основе разбираемых примеров делаются выводы относительно характеристик вычислительных машин, необходимых для управления производством, т. е. относительно их скорости, объема запоминающего устройства и т. д. В. С. Бородин

4445. Вычислительные машины как средство административного управления. Колман (Computers as tools for management. Coleman J. S.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 8—11 (англ.)

Рассматривается роль вычислительных машин в качестве средства ускоренного, дешевого и рационального управления промышленными предприятиями. Указывается, что в результате роста промышленности такое применение вычислительных машин становится все более необходимым и неотложным.

В качестве примера общности между научными, административными и вычислительными проблемами при использовании вычислительных машин указывается на существование и все большее применение линейного программирования, метода Монте-Карло и теории игр или теории выбора оптимальной стратегии. Отмечается важное значение вычислительных машин в военном деле для решения логических задач стратегии и тактики. Проблемы управления промышленным производством значительно сложнее, чем технические задачи, как например, задача управления производственным процессом. Поэтому необходима разработка научных методов анализа проблем управления промышленным производством, что позволит более эффективно использовать для их решения вычислительные машины. Б. И. Стрелков

4446. Применение вычислительных машин в производстве. Де-Карло (Application of data processors in production. DeCarlo C. R.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 61—65 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с применением вычислительных устройств для контроля и управления технологическими процессами, и ставятся проблемные задачи, решение которых может быть выполнено на современных вычислительных машинах.

Для использования вычислительных машин на производстве предварительно составляются картотеки деталей, входящих в изделие, запасных деталей, последовательности операций обработки для каждой из деталей, стоимости материалов и операций и времени, потребного на выполнение операций при изготовлении той или иной детали, а также на изготовление изделия в целом.

Наличие этих данных позволяет с помощью вычислительных устройств заранее вычислять моменты запуска в производство отдельных деталей, а затем в ходе изготовления корректировать результаты вычислений в зависимости от действительных скоростей изготовления деталей. При использовании для этих целей вычислительной машины ИБМ-701 для полной загрузки машины требуется около 1 млн. обычных перфокарт.

В качестве проблемных задач в области промышленного производства, стоящих перед современной вычислительной техникой, приводятся следующие:

1. Разработка стохастических моделей, т. е. вычислительных устройств, учитывающих случайный характер отдельных явлений, как-то: поломка или авария машин или станков, процент бракованных изделий, наличие людского состава, производственные нагрузки на машины в отдельные моменты времени др.

2. Усовершенствование стандартов на промышленное производство, т. е. научный выбор стандартов с учетом статистики на средства производства.

3. Улучшение методов предсказания при производстве и сбыте продукции. Это может содействовать расширению одних и сужению других отраслей производства в зависимости от рентабельности.

4. Применение линейного программирования для выбора наивыгоднейшего режима производства. Ряд вопросов такого рода, например определение состава горючих смесей, распределения необработанной руды при условии получения наибольшей прибыли, уже решался с помощью вычислительных машин.

5. Постановка и решение фундаментальных проблем комбинаторного анализа, возникающих в случае, когда технологические или производственные процессы поддаются математическому описанию. Ввиду большой сложности проблемы подобного рода ранее либо вовсе не решались, либо решались весьма приближенно с большой затратой времени и сил. В. С. Бородин

4447. Высказывания промышленников о стандартизации оборудования записи на магнитную ленту (Statements from manufactures on standartization of magnetic tape records), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 90—94 (англ.)

Приводятся стенограммы выступлений на совещании, посвященном вопросам стандартизации оборудования записи на магнитную ленту. Совещание было созвано по инициативе комитета по стандартизации, организованном на конференции по вычислительным машинам. Обсуждались вопросы о целесообразности стандартизации и ее размерах. Мнения выступавших по этим вопросам разделились. Сторонники стандартизации в качестве первого немедленного шага предлагали ввести стандарты на характеристики магнитной ленты (ширина ленты, длина ленты на бобине, допуски на размеры ленты, вес на единицу длины, натяжение) и бобины. Было также предположение ввести стандарты на ширину дорожек, их количество, расстояние между ними, скорость ленты, а также вид и толщину покрытия. В дальнейшем предлагалось стандартизировать плотность записи, форму импульсов чтения, способы чтения и записи, что в свою очередь дало бы возможность ввести стандарты на усилители записи и чтения. Был поставлен вопрос о стандартизации «языка» вычислительных машин, что позволило бы обмен информацией с помощью магнитных лент.

Доводы противников немедленной стандартизации сводились главным образом к тому, что технология и производство как магнитных лент, так и записывающего оборудования еще не стабилизировались и введение стандартов затормозило бы их дальнейшее развитие. А. И. Щуров

4448. Цифровая вычислительная техника (Digital computer techniques), Electr. Rev., 1956, 158, № 17, 663 (англ.)

Приводится отчет о состоявшейся в апреле 1956 г. конференции по цифровой вычислительной технике, созванной по инициативе Общества английских авиаконструкторов (Society of British Aircraft Constructors).

На конференции был сделан доклад о развитии вычислительной техники во Франции, где в настоящее время находится в эксплуатации около 450 средних и малых электронных вычислительных машин, применяемых главным образом для коммерческих целей. Цена их колеблется от 20 000 до 50 000 фунтов стерлингов. Упоминается, что фирмой Булль (Bull) было выпущено 300 электронных вычислительных машин ГАММАЗ. Машины экспортируются.

Большое внимание на конференции было уделено применению в вычислительной технике кристаллических триодов. Было отмечено, что фирма «Bell System», используя в своих работах около 15 000 точечных триодов, за длительное время зарегистрировала на каждые 1000 час. работы выход из строя 0,03% триодов от общего количества.

На конференции обсуждались также вопросы о применении вычислительных машин для неарифметических задач и о методах численного анализа. Было описано запоминающее устройство на ферритовых сердечниках, построенное в Массачусетском технологическом институте.

На конференции было сделано сообщение о возможности постройки вычислительной машины на кристаллических триодах и магнитных сердечниках.

Кроме того, была рассмотрена экономичная система записи и чтения для магнитного барабана. Запись и чтение на 256 дорожках производятся при помощи всего лишь 180 ламп, причем 30 или 40 из них используются для целей управления. В. П. Кузнецова

4449. Быстродействующие вычислительные машины и автоматизация производственных процессов. Явлинский Н. А., Электричество, 1956, № 9, 7—14

В статье говорится о возможности применения электронных вычислительных устройств для автоматизации процессов управления отдельными станками и агрегатами, поточными линиями, цехами и промышленными предприятиями. Совместная работа быстродействующей вычислительной машины и системы автоматического регулирования позволяет перейти от управления по одному или нескольким параметрам к так называемому оптимальному регулированию. При оптимальном регулировании система автоматически вычисляет, на основании имеющейся информации, возможные конечные состояния процесса и выбирает из них наиболее благоприятный. Коротко изложены принципы работы цифровой вычислительной машины и описаны основные ее элементы.

Работы по применению вычислительных машин для автоматизации производства ведутся в двух направлениях. Первое — разработка автоматов с большим, но все же ограниченным числом закодированных сигналов. Второе — это использование вычислительных машин в качестве управляющих машин, осуществляющих оптимальное регулирование сложными системами.

В качестве примера первого направления приводится описание устройства управления вертикально-фрезерным станком, разработанного Массачусетским технологическим институтом в 1951 г. Применение вычислительных машин для полной автоматизации производственных процессов требует во многих случаях коренной перестройки технологии производства. Как пример приводится решение фирмой Дженерал Электрик задачи полной автоматизации работ по монтажу радиоустройств. Применение вычислительных машин для полной автоматизации производства предъявляет особые требования к повышению надежности вычислительных машин. В. П. Кузнецова

4450. Применение вычислительных машин при конструировании. Решение механических и аэродинамических проблем (Computers applied to engineering design. Solving mechanical and aerodynamic problems), Engineering, 1955, 180, № 4684, 640—641 (англ.)

Приведены примеры применения фирмой «Оренда» (Orenda Engines Limited) цифровой вычислительной машины КПК (CPC) фирмы ИБМ при решении аэродинамических и термодинамических проблем, возникающих при конструировании реактивных двигателей, и исследовании связанных с ними вопросов.

В. А. Комаров

4451. Новое применение электронных вычислительных машин. (New uses for electronic computers), Engng News-Rec., 1956, 157, № 3, 29 (англ.)

Сообщается об опыте использования электронных вычислительных машин для проектирования дорог и расчета земляных работ. Указывается, что сложность программирования машин для решения указанных задач ограничивает целесообразность такого использования электронных вычислительных машин.

Б. И. Стрелков

4452. Электронные вычислительные машины решают задачи технического производства. Де-Карло (Electronic computers solving production-engineering problems. De Carlo Charles R.), Mech. Engng, 1956, 78, № 5, 416—418 (англ.)

Указывается на возможность применения электронных вычислительных машин для управления производством.

Сообщается, что в авиационной промышленности нашла применение машина ИБМ-701 для планирования производства и управления цехами. На машине составляется «основной план», который показывает с помощью цеховых календарных данных точный день ожидания каждого самолета на данной операции или линейную позицию на производственной линии. Информация, принадлежащая плану, техническое описание, дополнительные требования, стоимость и т. д. записываются на главной магнитной ленте. Каждую неделю составляется также лента, отражающая технические, производственные и инвентаризационные изменения. С помощью вычислительной машины обе ленты подвергаются обработке и составляется полностью измененная, новая, главная лента. Предыдущие распоряжения цеху исследуются и, если требуется, производится запись на выходную ленту для последующего составления распоряжений. Таким образом, техническая, производственная, инвентаризационная и плановая информации поступают непрерывно для лучшего управления. Для оценки рабочих норм и измерения продукции производства применяется метод статистических проб (Монте-Карло).

Путем статистических вычислений составляются уравнения, содержащие переменные величины производства. Уравнения решаются для всех разделов производства и результаты сравниваются с действительными данными для определения соответствия.

Упоминается устройство для определения минимальной стоимости перевозок товаров от нескольких источников к различным пунктам назначения, при условии удовлетворения всем требованиям рынка. Используя это устройство для распределения товаров, при большом количестве перевозок, можно сэкономить многие тысячи долларов. М. С. Саплин

4453. Основные промышленные применения вычислительных машин. Портер (Computers in basic business applications. Porter F. J., Jr), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 12—18. Discuss. 18 (англ.)

Обсуждаются вопросы организации работы вычислительного центра, решающего задачи для промышленности и торговли. Высказывается мнение, что целесообразнее научить производственника пользоваться вычислительной машиной, чем заставить специалиста по вычислительной технике вникать в тонкости производства. Г. Г. Меньшиков

4454. Кто обслуживает новые вычислительные машины? Брин (Who are manning the new computers? Breen John M.), Computers and Automat., 1955, 4, № 10, 28, 36 (англ.)

4455. Библиография работ по автоматическому регулированию и некоторым смежным вопросам. Сост. Храмой А. В., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автомат. регулирования. 3. М.—Л., 1955, 191—333

4456. Современная автоматика — практическое орудие производства (Automation now a practical engineering tool), Brit. Communs and Electronics, 1956, 3, № 1, 35 (англ.)

Сообщение фирмы «EMI» о выпуске станка с полным электронным автоматическим управлением, спроектированного на основе копировально-фрезерного станка, выпускаемого компанией «Рисёрч Энджинирс». Вместо шаблона составляется таблица основных размеров. Далее, при помощи интерполятора получают относительно большое число промежуточных точек, которые

кодируются и переносятся на перфоленту. Весь процесс подготовки задачи занимает около 2 час. вместо 7 недель в случае приготовления шаблона. Управляющий блок состоит из считывающего устройства, интерполятора, запоминающего устройства и сервоусилителей. В. М. Тарасевич

4457. Автоматическое управление металлорежущими станками с помощью перфокарт (Punch-card-controlled machining), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 10, 1760—1761 (англ.)

4458. Вычислительная машина приготовляет магнитную ленту для управления станком (Computer prepares magnetic tape for machine control), Electr. Manufact., 1955, 56, № 2, 132—133 (англ.)

Сообщение о системе для управления станками «Нумерикорд» (Numericord). Система состоит из 4 блоков: 1) блока для набивки в десятичной форме на перфоленте данных изготовляемой детали, режимов резания и данных инструмента; 2) электронной вычислительной машины, которая преобразует цифровую информацию перфоленты в непрерывные сигналы управления и записывает их на 14 параллельных дорожках магнитной ленты; 3) блока для воспроизведения управляющих сигналов магнитной ленты; 4) сервомеханизмов, управляющих станком.

Система может управлять перемещением по пяти пространственным осям и выполнять 22 вспомогательные операции. См. РЖМат, 1956, 9219. А. И. Щуров

4459. Общая проблематика переключающих устройств и математических машин. К л и к а (Společná problematika spojovacíno zařízení a matematickych strojú. K l i k a O t á k a r), Stroje szpracov. inform., 1955, № 3, 15—30 (чеш.; рез. русск., англ.)

Автор сравнивает отдельные блоки переключающих устройств (например, телефонной центральной станции) и математических машин, обращает внимание на аналогию в работе этих блоков и выдвигает общие проблемы, вытекающие из этой аналогии. З. Коутский

4460. Демонстрация высокоскоростных цифровых вычислительных машин. Б а у э р, К а р р III (On the demonstration of high-speed digital computers. B a u e r W a l t e r F, C a r r III J o h n W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, 1, № 4, 177—182 (англ.)

Обсуждаются вопросы, связанные с программой демонстрации вычислительных машин на выставках и т. п., с целью популяризации определенной модели машины. З. Д. Доброхотова

4461. Итоги конференции. Ф о р р е с т е р (Conference summary. F o r r e s t e r J a y W.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 95—100 (англ.)

В популярной форме излагаются вопросы, затронутые на Восточной конференции по вычислительной технике 1955 г. Обсуждаются перспективы применения вычислительных устройств в ближайшее пятилетие. И. К. Волков

4462. Электронные моделирующие установки Института автоматики и телемеханики АН СССР. К о г а н Б. Я., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автомат. регулирования. М.—Л., 1955, 3, 47—69, выступления 70—71

Все установки построены по структурному типу. Первые три типа моделирующих установок ЭМУ-1, ЭМУ-2 и ЭМУ-3 предназначены для моделирования систем, описывающихся линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами не выше 10 порядка (ЭМУ-3 — не выше 6 порядка).

Решающие элементы установок базируются на трехкаскадном усилителе постоянного тока с триодной компенсацией дрейфа нуля в первом каскаде, коэффициентом усиления около 50 000 и глубокой отрицательной обратной связью. Переменные во времени коэффициенты воспроизводятся кулачковым вариатором коэффициентов. Установки снабжены электрогидравлической следящей системой для преобразования выходного напряжения в угол поворота. Точность выполнения математической операции одним решающим элементом не ниже $\pm 1\%$. Погрешность решения системы линейных дифференциальных уравнений шестого порядка около 3%.

Моделирующая установка ЭМУ-4 базируется на решающих усилителях с автоматической стабилизацией нулевого уровня. Приведенный ко входу дрейф нуля усилителя не превышает 80 *мкв*, ширина полосы пропускания до 1000 *гц*, пределы линейности ± 100 *в* при нагрузке 10 *ком*.

Установка дополнена блоком типичных нелинейностей, который служит для воспроизведения ограничений (насыщения) по модулю, люфта, зоны нечувствительности, релейных характеристик, петли гистерезиса и др.

Набор задачи осуществляется установкой штепсельных вилок в гнезда коммутатора на картограмме, чем достигается упрощение набора и исключение ошибок.

Воспроизведение нелинейных функций осуществляется функциональным преобразователем и множительно-делительным устройством. Рассматривается работа электромеханического множительно-делительного устройства и трех типов функциональных преобразователей, построенных на базе электроннолучевой трубки.

Питание моделирующих установок осуществляется через стабилизированный источник питания, обеспечивающий точность выходного напряжения $\pm 0{,}02\%$ при изменении нагрузки в пределах от 0 до 100% и изменении питающего напряжения на $\pm 5\%$. Амплитуда высших гармоник в выходном напряжении не превышает 10 *мв*. Приводятся электрические схемы и фотографии рассмотренных блоков моделирующих устройств. П. В. Тихонов

4463. Универсальное электронное моделирующее устройство. I. П о л (A general purpose electronic analogue computor. I. P a u l R. J. A.), Proc. Instn Electronics, 1955, № 38, 5—24 (англ.)

Приводится сравнение моделирующих устройств и цифровых машин с точки зрения целесообразной области применения. Рассматриваются принципы работы моделирующих устройств различных типов. Дается описание методов выполнения различных операций в электронных моделирующих устройствах. Приводится расчет операционного усилителя и схема коррекции дрейфа нуля. Б. И. Стрелков

4464. Универсальное электронное моделирующее устройство. II. П о л (A general purpose electronic analogue computor. II. P a u l R. J. A.), Proc. Instn Electronics, 1955, № 39, 9—28 (англ.)

Ч. I см. реф. 4463.

Приводится описание моделирующего устройства «Short» (РЖМат, 1955, 5375). Даются примеры некоторых типичных применений машины. Подробно описано решение системы из двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка, а также задач по расчету флаттера и боковой устойчивости самолета. Б. И. Стрелков

4465. Универсальное электронное моделирующее устройство. III. П о л (A general purpose electronic analogue computor. III. P a u l R. J. A.), Proc. Instn Electronics, 1955, № 40, 25—35 (англ.)

Ч. I, II, см. реф. 4463, 4464. Даются примеры решения некоторых практических задач для исследования различных радиотехнических, электрических и механических приборов с помощью моделирующего устройства «Short». Описывается решение дифференциального уравнения Матье, применяющегося при исследовании

частотно-модулированного генератора, решение дифференциального уравнения Релея, находящего применение при исследовании некоторых акустических явлений, а также решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля, описывающего процессы в генераторе затухающих колебаний. Описывается методика и даются примеры непосредственного моделирования электрических и механических приборов с помощью электронного моделирующего устройства без составления уравнений этих устройств. Метод заключается в замещении реальных элементов устройств соответствующими решающими элементами машины. Преимуществом такого метода перед обычным методом моделирования с помощью электрических моделей является возможность изменения параметров исследуемого устройства путем простого изменения коэффициентов соответствующих решающих элементов.

Приводится пример непосредственного моделирования системы регулирования напряжения мотор-генератора. Указывается на широкие возможности применения электронных моделирующих устройств в различных областях науки и техники и, в частности, для решения экономических проблем, исследования и управления производственными процессами, а также для моделирования процесса полета в летных тренажерах.

Библиография из 34 назв. Б. И. Стрелков

4466. Моделирующее устройство отдела исследований командования военно-воздушных сил для моделирования испытаний реактивного двигателя (Jet engine testing computer developed for ARDC), Electr. Engng, 1956, 75, № 7, 659—660 (англ.)

Сообщается, что фирмой «Дженерал Электрик» (General Electric Company, N. Y.) построено гигантское моделирующее устройство для моделирования работы реактивных двигателей при высоте полета самолета до 6000 *м*, температуре воздуха до 40° ниже нуля и скорости полета до 2000 *км/час*.

С помощью устройства исследование спроектированного и еще не построенного двигателя производится за несколько часов. Результаты испытаний фиксируются в виде графиков.

Устройство строилось 6 лет, всего на постройку было потрачено 85310 человеко-часов. Оно занимает площадь 10×30 *м* и имеет высоту 4 *м*. Блок питания состоит из мотора на 150 *л. с.* и 4 генераторов по 103 *квт*.

В машине насчитывается 6000 электронных ламп и мощная установка для кондиционирования воздуха, обеспечивающая работу инструментов и электронных ламп при стабильной температуре.

Б. Н. Малиновский

4467. Основные применения моделирующих устройств. Герман, Старкс, Рудольф (Basic applications of analog computers. Hermann P. J., Srarks K. H., Rudolph J. A.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 3, 464—469 (англ.)

Изложены принципы построения моделирующих устройств на примере моделирующего устройства ГЭДА (GEDA) и применения его для решения некоторых задач. П. В. Тихонов

4468. Вычислительная машина для анализа записи на фотопленке (Film analyser/computer.), Electr. J. 1955, 155, № 8, 638—639 (англ.)

Описывается вычислительная машина К-1001 для определения корреляционных функций непрерывных данных, записанных на фотопленке, выпущенная фирмой «Саутерн Инструментс» (Southern Instruments).

Фотопленки шириной 35 *мм* ставятся в читающие устройства, которые представляют собой фотоэлектронные повторители кривых, преобразующие запись на пленке в напряжения. В этих повторителях имеются электроннолучевые трубки, луч которых колеблется с частотой 10 *кгц*. Изображение с экрана фокусируется на пленку с записью, за которой расположен фотоэлектронный умножитель. Сигнал с умножителя подается, после предварительного усиления, на фазочувствительный выпрямитель, который при отклонении центра прочерчиваемой лучом линии от записанной линии дает сигнал, поправляющий положение луча, т. е. приводит среднее положение луча опять на линию записи. Этот сигнал с выхода выпрямителя пропорционален отклонению линии записи от среднего значения и подается для дальнейшей обработки на специальные блоки.

Перед экраном ставится еще один фотоэлектронный умножитель, который связывается через усилитель с сеткой электроннолучевой трубки, образуя вместе с усилителем следящую систему, поддерживающую постоянную яркость луча.

В машине имеется 3 читающих устройства, два из них используются для считывания сигнала с пленки нормальной ширины при определении корреляционных функций, а третье для перезаписи сигнала с пленки шириной от 16 до 150 *мм* на пленку нормальной ширины. Скорость движения пленки в первых двух читающих устройствах от 50 до 400 *мм/сек*, в третьем 3—400 *мм/сек*.

При вычислении корреляционных функций с пленок в определенные моменты времени считываются сигналы, которые затем перемножаются и произведения интегрируются. Результаты вычислений записываются, и после соответствующего интервала времени вычисления повторяются.

Последовательность операций определяется микропереключателями, установленными на считывающих головках и управляемыми при помощи отверстий, прорезанных в перемычках между перфорационными отверстиями.

Кроме корреляционных функций, интегрируя выходной сигнал читающего устройства, можно получить среднее значение величины. Применяя перемножитель вычисляя квадраты выходных сигналов и интегрируя затем их, можно получить стандартное отклонение и т. п.

В машине имеется ряд операционных блоков — усилителей постоянного тока с большим коэффициентом усиления и малым дрейфом и перемножителей. Выходы операционных блоков объединены на одной панели для облегчения коммутации.

Вычерчивание коррелограмм ведется автоматически карточным регистрирующим потенциометром фирмы «Хонейвел-Браун» (Honeywell-Brown potentiometer recorder) на картах шириной 275 *мм*. В. Д. Князев

4469. Универсальная вычислительная машина для математических операций с графиками. Френч, Таунер, Беллис, Кук, Фер, Холт (A curve analyzer and general purpose graphical computer. French C.S. Towner George H., Bellis Donald R., Cook Richard M., Fair William R., Holt Walter W.), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 8, 765—775 (англ.)

В статье описаны принцип работы, схема и конструкция электронно-механической вычислительной машины непрерывного действия для операций с графиками. Машина, похожая на электромеханические машины для решения дифференциальных уравнений, включает в себя 5 преобразующих, 9 суммирующих, 2 интегрирующих блока, а также записывающее и управляющее устройство.

Преобразующие блоки выполнены в виде автоматически перемещающихся планшетов размером 35×43 *см*, на которых закрепляются графики различных экспериментальных кривых. Перемещение планшета осуществляется следящей системой, управляемой электрическим сигналом, определяющим изменение во времени

независимой переменной, которое, в частности, может быть равномерным. Другая, фотоэлектрическая следящая система, следя за вычерченной на графике функцией, заставляет соответственно перемещаться движок потенциометра. Преобразованные из графической формы в электрические напряжения функции вводятся в электронные суммирующие или интегрирующие блоки, порядок соединения которых между собой и с преобразующими блоками задается управляющим устройством.

Полученные в виде электрических напряжений результаты вычислений могут быть либо введены в другие вычислительные машины, либо зарегистрированы в виде графиков записывающим устройством.

В. В. Васманов

4470. **Швейцарское моделирующее устройство. Интегрирующая установка ИА-55. Галло, Юккер** (Ein Schweizerisches Analogie-Rechengerät. Die Integrieranlage IA 55. Gallo M., Jucker E.), Techn. Rundschau, 1956, **48**, № 14, 21, 23, 25 (нем.)

Дается описание построенного в Цюрихе электромеханического моделирующего устройства ИА-55 (IA-55), предназначенного для решения как линейных, так и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, заданными либо графически, либо целыми или дробно-рациональными алгебраическими функциями. Указывается, что, помимо решения чисто математических задач, устройство с успехом может применяться для исследования процессов автоматического управления (например, для моделирования динамики полета управляемых снарядов).

В установке ИА-55 значения переменных задаются величинами амплитуды переменного напряжения частоты 400 *гц* и угла поворота вала соответствующего решающего элемента. Так как выходной величиной интегратора является величина механическая (угол поворота), то для осуществления электрической связи между отдельными вычислительными элементами устройства интеграторам приданы специальные емкостные электромеханические преобразователи. Благодаря тому, что выходное напряжение такого преобразователя пропорционально как величине его емкости, так и величине входного напряжения, с его помощью оказывается возможным не только преобразование механических величин в электрические, но и выполнение операций умножения и функционального преобразования. Каждый интегратор несет на своем выходном валу 6 линейных и 2 тригонометрических емкостных преобразователя. Это дает возможность перемножать выходную величину интегратора с 6 другими переменными величинами, возводить ее в 6-ю степень, легко осуществлять переход от декартовой к полярной системе координат и т. п.

Установка состоит из 12 интегрирующих и 6 суммирующих элементов, собранных по 3 в отдельных съемных блоках, имеющих полностью автономное питание, что позволяет, в случае надобности, расширять вычислительный объем устройства. Для коммутации отдельных вычислительных элементов между собой применяются штеккерные наборные панели (3 панели по 4446 гнезд). Регистрация решения производится с помощью самописца, погрешность которого не превышает 2% от полной шкалы (менее 0,25 *мм*). Установка снабжена специальным устройством («переменным масштабом времени») для автоматического регулирования скорости вычислений. Отмечается, что среднее время решения составляет примерно 10—20 сек., максимальное — 40 сек. При работе в натуральном масштабе времени максимальная рабочая частота не должна превосходить $^1/_8$ *гц*. Погрешность выполнения отдельных операций около 1%. Г. М. Грязнов

4471. **Опыт работы с боннской интегрирующей установкой. Мюллер** (Erfahrungen mit der Bonner Integrieranlage. Müller P. F.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 5, 219—224 (нем.)

Сообщается об опыте эксплуатации электромеханического моделирующего устройства Боннского института инструментальной математики. Указывается, что одним из существенных источников ошибок в электромеханических устройствах является принципиально неустранимое проскальзывание фрикционного интегрирующего ролика. В осцилляторных схемах, например, это обстоятельство вызывает увеличение от периода к периоду амплитуды гармонических колебаний, которое при значительной скорости работы устройства уже в соседнем периоде может составлять величину порядка 1%. Так как при решении задач часто необходимо получать чисто гармонические функции, то для компенсации ошибки скольжения в уравнение осциллятора вводят демпфирующий член.

Другим источником ошибок может являться возникающее со временем загрязнение пылью и металлическими частичками в местах сочленения отдельных движущихся частей, возникающее в результате стирания трущихся поверхностей и т. п. В результате электромеханические связи в установке могут заметно отличаться от идеальных и даже быть нарушенными. Указывается, однако, что благодаря блочному принципу строения машины можно легко произвести замену плохо работающих блоков запасными.

Отмечается, что недавно разработанные новые функциональные столы, оборудованные фотоэлементами, оказались настолько чувствительными к колебаниям напряжения в сети (изменение напряжения на 0,5—1% дает заметное отклонение: порядка 0,1 *мм*), что для обеспечения высокой точности работа с ними должна производиться лишь в спокойные вечерние или ночные часы.

Г. М. Грязнов

4472. **Описание электронного интегратора. Вьяр, Крени** (Description et utilisation d'un intégrateur électronique. Viard Jean, Crenn Henri), Mém. poudres, 1955, **37**, 319—329 (франц.)

Приводится описание и теория интегратора, построенного на базе электронного усилителя. Интегратор включает в себя кроме усилителя: входной блок с большим входным сопротивлением и выходной блок. Общая погрешность интегратора не превышает 2%, что подтверждается поверочными расчетами.

А. А. Крюков

4473. **Точные потенциометры для моделирующих устройств. Кабеш, Тикал** (Přesné potenciometry pro analogové matematické stroje. Kabeš Karel, Tikal F.), Slaboproudý obzor, 1956, **17**, № 9, 507—513 (чеш.; рез. русс., нем., англ., франц.)

Статья знакомит с точным потенциометром, разработанным для моделирующих устройств. Рассматриваются требования к такого рода потенциометрам. Описывается конструкция стержневого потенциометра и его электрические и механические свойства.

Л. С. Легезо

4474. **Решение линейных алгебраических уравнений с помощью многообмоточных трансформаторов. Райдер** (Linear algebraic computation by multi-winding transformers. Ryder Frederick L.), J. Franklin Inst., 1955, **259**, № 5, 427—439 (англ.)

Описывается методика составления расчетных схем и применения специальных многообмоточных трансформаторов для решения систем линейных алгебраических уравнений. Для решения матрицы n-го порядка требуется ввести в схему n трансформаторов с n обмотками на каждом.

Действие предложенного вычислительного устройства основано на подобии решаемых алгебраических уравнений и уравнений, описывающих электрические

процессы в схеме, состоящей из последовательно соединенных трансформаторов.

Соотношение чисел витков в обмотках трансформаторов выбирается в соответствии с коэффициентами решаемых уравнений; искомые величины неизвестных определяются через напряжения или токи в обмотках трансформаторов. Вычислительное устройство выполнено в виде отдельных блоков. Погрешность вычислительного устройства определяется качеством магнитных материалов.

При наборе сердечников трансформаторов из специального железа, обладающего высокой магнитной проницаемостью (толщина листов 0,13 *мм*), ошибка в результатах составляет 0,25% для каждого из уравнений. А. А. Крюков

4475. Машина для определения кристаллических структур. Черный, Облонский (Stroj na výpočet krystalových struktur. Černý Václav, Oblonský Jan), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 31—47 (чеш.; рез. русс., англ.)

Описывается цифровая машина для определения кристаллических структур в трех измерениях методом подбора. Нужно подобрать такие числа x_n, y_n, z_n (эти числа пропорциональны координатам атомов в кристаллической решетке), чтобы вычисленные значения

$$S^2_{hkl} = \left[\sum_{n=1}^{N} \psi_n \sin(hx_n + ky_n + lz_n)\right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{N} \psi_n \cos(hx_n + hy_n + lz_n)\right]^2$$

были пропорциональны значениям $\overline{S^2_{hkl}}$, измеренным по рентгеновским снимкам. N — число атомов в молекуле, для машины $N \leqq 60$, h, k, l — целые числа, связанные с индексами Миллера, ψ_n — атомный множитель. Машине задается критерий пропорциональности величин и она сама заканчивает вычисления по достижении требуемой пропорциональности.

Машина релейная (содержит 1100 реле), с двоичным параллельным кодом и фиксированной программой. Входные данные вводятся в машину при помощи клавиатуры и перфокарт, результаты выводятся с помощью печатающего устройства. Скорость машины 40 операций в 1 сек. Подробно описаны метод, ход вычислений и скелетная схема машины. Z. Koutský

4476. Машина для синтеза рядов Фурье. Облонский (Stroj na Fourierovy synthesy. Oblonský Jan), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 49—59 (чеш.; рез. русс., англ.)

Машина вычисляет электронные плотности при помощи синтеза рядов Фурье в той форме, которая по существу известна как метод лент Биверса—Липсона. Метод несколько видоизменен с учетом вычислений на машине с перфокартным вводом данных. Электронные плотности вычисляются на заранее выбранных плоскостях, в результате одного вычисления получается карта электронной плотности в одной плоскости. Электронная плотность в точке плоскости с координатами (x, y) дана выражением

$$\rho(x, y) = \sum_h A_{h,y} \cos 2\pi hx + \sum_h B_{h,y} \sin 2\pi hx,$$

$A_{h,y}$, $B_{h,y}$ — постоянные, зависящие от h и y, h — индекс суммирования. При вычислении ограничиваются первыми 15 членами. Обработка перфокарт с 14400 точками продолжается при скорости 7 операций в 1 сек. 34 рабочих часа машины. Приготовление перфокарт требует 22 часа. Машина цифровая, релейная (70 реле), с двоичным параллельным кодом. Ввод данных производится при помощи перфокарт, результаты печатаются печатающим устройством. Z. Koutský

4477. Одномерный синтезатор непрерывного действия. Азаров (A one-dimensional Fourier analog computer., Azaroff Leonid V.), Rev. Scient. Instrum., 1954, **25**, № 5, 471—477 (англ.)

Описан гармонический синтезатор, построенный Кристаллографической лабораторией Массачусетского технологического института. Он предназначен для вычисления значений функции по ее 30 гармоникам.

Независимая переменная величина t поступает в прибор в виде угла φ_1 поворота вала, вращающегося от электродвигателя. Умножающий блок с 30 выводами умножает величину t на 30 различных множителей равных $i_1 \frac{2\pi}{T}$, и различающихся значениями i_1 (1, 2, . . ., 30). Величины $i_1 \frac{2\pi}{T} t$ вырабатываются в виде углов $\varphi_{2-1} \cdots \varphi_{2-i_1} \cdots \varphi_{2-30}$ поворота выводных валов умножающего блока. Эти валы одновременно являются вводными валами 30 синусных блоков, построенных на вращающихся трансформаторах. На выходах синусных блоков образуются напряжения $U_1 \ldots U_{i_1} \ldots U_{30}$, изменяющиеся во времени по синусоидальному и косинусоидальным законам, амплитуды которых устанавливаются с помощью 30 отдельных рукояток.

Образующиеся 30 синусоидальных и 30 косинусоидальных электрических напряжений складываются в суммирующем блоке, выполненном в виде электрической цепи на сопротивлениях. На выходе цепи в виде напряжения снимается функция, являющаяся результатом синтеза. Это напряжение подается на выводные устройства, одно из которых представляет собой электроннолучевую трубку, а другое — вольтметр. На первом функция фиксируется следом светящейся точки на экране; на втором — фиксируется стрелкой по шкале. В. В. Васманов

4478. «Дженерал Электрик» вводит электронное вычислительное устройство для инженеров (G. E. introduces electronic computer for tool engineers), Oil in Canada, 1955, **8**, № 6, 32 (англ.)

Фирма «Канадиен Дженерал Электрик» сообщает о новом электронном вычислительном устройстве, предназначенном для инженеров-специалистов по механической обработке металлов. Это устройство позволяет вычислять 14 величин: скорость, подачу, глубину резания, долговечность инструмента, твердость материала и т. д.

Вес устройства около 14 *кг* и габариты 52×17×50 см. В. М. Тарасевич

4479. Международная конференция по машинам непрерывного действия. (A report on the International Analogy Computation Meeting.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **5**, № 1, 36—41 (англ.)

С 27 сентября по 1 октября 1955 г. в Брюсселе (Бельгия) состоялась международная конференция по моделирующим устройствам, в которой участвовали представители 18 государств (в том числе и СССР).

Были заслушаны сообщения по вопросам сооружения и эксплуатации электронных моделирующих устройств, расчетных столов переменного и постоянного тока, специальных расчетных столов типа «Анаком», механических дифференциальных анализаторов, специальных вычислительных машин и др.

На секциях конференции было заслушано девяносто сообщений, касающихся методики решения отдельных математических задач, точности получаемых результатов, отдельных узлов моделирующих устройств, применения моделирующих устройств в различных отраслях науки и техники.

Одновременно с конференцией была организована выставка моделирующих устройств и отдельных узлов или блоков. А. А. Крюков

4480. Электрические моделирующие устройства; классификация, конструкция, применение. Пашкис (Electricanalog computers: classification, design, and application. Paschkis Victor), Ann. N. Y. Acad. Sci , 1955, 60, № 6, 884—904 (англ.)

Электрические моделирующие устройства служат для изучения различных физических явлений или процессов с помощью электрических величин. Моделирование осуществляется на основе подобия уравнений, описывающих как изучаемое явление, так и процесс в моделирующем устройстве.

Электрические моделирующие устройства могут быть разбиты на три основные группы:

а) Модели, являющиеся геометрическим подобием исследуемой системы. В этом случае моделирование производится с помощью какой-либо проводящей среды; металлизированной бумаги, жидкости и т. п. К недостаткам этого типа моделирующих устройств относится их полная неуниверсальность, так как для каждого вида исследований требуется сооружение отдельной модели.

б) Модели, состоящие из большого числа пассивных элементов: сопротивлений, индуктивностей, конденсаторов, и моделирующие некоторый объем тела, процессы в котором изучаются. Эти модели являются более универсальными.

в) Комбинированные модели.

Общая точность расчетов, проводимых на подобных моделях, легко доводится до 1%. Для уменьшения ошибки элементы должны тщательно калиброваться. А. А. Крюков

4481. Библиография литературы по вопросам математического моделирования (по вычислительным машинам непрерывного действия) (1947—1954 гг.). Автоматика и телемеханика, 1956, 17, № 3, 279—288

Приводится список книг, трудов съездов и конференций по вопросам математического моделирования за 1947—1954 гг., охватывающий математические машины непрерывного действия. I. Книги — 35 назв., из них 28 на русском языке. II. Труды конференций — 5 сборников материалов конференций, из них 1 на русском языке. III. Общие теоретические вопросы. 1. Общие вопросы — 59 назв. различных статей, из них 10 на русском языке. 2. Методика решения задач с помощью моделирующих устройств — 10 назв. 3. Точность работы моделирующих устройств и их элементов — 12 назв. IV. Электрические моделирующие устройства, построенные из отдельных решающих элементов (электронные математические машины непрерывного действия) — 44 назв. V. Решающие элементы электронных моделирующих устройств. 1. Электронные усилители постоянного тока — 17 назв. 2. Безламповые решающие усилители (магнитные усилители, транзисторные усилители и т. п.) — 5 назв. А. А. Крюков

4482. Вычислительное устройство для определения режима работы металлорежущих станков (Carbide machinability computer), Canad. Mach. and Manufact. News, 1955, 66, № 10, 129 (англ.)

Приводятся краткие технические сведения о вычислительном устройстве для определения технологических режимов металлорежущих станков. Прибор выпущен фирмой «Дженерал Электрик». В. Д. Князев

4483. Вычисление разностей на счетно-аналитических машинах. Мункельт (Differenzenbildung mit Lochkartenmaschinen. Munkelt Karl), Dtsch. hydrogr. Z., 1954, 7, № 1—2, 42—55(нем.; рез. англ., франц.)

Описываются различные методы вычисления диагональных и центральных разностей высокого порядка на счетно-аналитических машинах фирмы ИБМ, разработанные в Немецком гидрографическом институте. На примере задач Института показывается, как можно протабулировать функцию на перфорационных машинах. В работе дается краткая характеристика табулятора Д-11 и вычислительного перфоратора 623, достаточная для составления программ вычислений. В основу схем вычисления разностей положен метод, предложенный в 1948 г. (имеется ссылка на источник) для получения восходящих разностей на вычислительном перфораторе 602 ИБМ с помощью формул

$$\Delta^r_{n-r} = y_n - \sum_{i=0}^{r-1} \Delta^i_{n-1-i}, \quad \Delta^i_{n-i} = \Delta^{i+1}_{n-1-i} + \Delta^i_{n-1-i}.$$

Автор переносит этот метод вычисления разностей на табулятор Д-11 и вычислительный перфоратор 623 и развивает его в применении к вычислению нисходящих разностей, а также центральных разностей, которые встречаются в интерполяционных формулах Гаусса, Стирлинга и Бесселя. Особенностью всех рассмотренных схем вычисления разностей является то, что в процессе вычисления разностей по последним вычисляются значения функции, что может служить надежным контролем правильности вычисления разностей. На примере нахождения часовых значений эфемерид светил по их суточным значениям показывается способ осуществления субинтерполяции. Окончательная работа по вычислению табличных значений проводится на табуляторе Д-11 по формуле Ньютона.

Примечание референта. Вычисление табличных значений, как это показано в работе «К численному решению некоторых задач анализа на табуляторах вертикально-горизонтального действия» (Докл. АН СССР, 1948, XII, № 6), более экономично можно выполнить по формулам Гаусса. К. А. Карпов

4484. Двоично-восьмеричная счетная машина (Binary-octal marchant calculator), Computers and Automat., 1955, 4, № 5, 45 (англ.)

Сообщение фирмы «Райтеон» (Raitheon) о выпуске клавишной счетной машины, способной выполнять арифметические действия в двоичной и восьмеричной системе, а также перевод чисел из двоичной системы в десятичную и наоборот.

4485. Счетная машина имеет много новых свойств. (Calculator has many new features), Amer Business, 1955, 25, № 2, 46 (англ.)

Сообщение фирмы «Monroe Calculating Mashine» о выпуске новой настольной счетной машины «Simplex Monro-Matic». В отличие от ранее выпускаемых моделей этой фирмы данная конструкция обладает рядом особенностей: в машине возможен автоматический набор делимого перед делением, автоматический возврат каретки от клавиш вычитания, сложения и умножения. Конструкция наборного механизма (клавиатура) позволяет установить число, часть которого может быть сохранена и не будет гаситься, а часть набранного числа будет гаситься в зависимости от желания оператора. Кроме того, оперативные клавиши имеют несколько большие размеры, чем у ранее существующих моделей, что является некоторым удобством при эксплуатации. Н. А. Саранцев

4486. Счетный инструмент коммутаторного типа. Накагава, Кимура (コンミユテータ型數字式計器の 試作・中川隆，木村一男)，計測，Кейсоку, J. Soc. Instrum. Technol. Japan, 1956, 6, № 6, 278—281 (япон.; рез. англ.)

Сообщается о приборе, выполняющем запись непрерывных данных на графике и преобразование их в цифровую форму с последующей печатью. Точность прибора 0,5%. Г. Г. Меньшиков

4487 Д. **Моделирующее устройство для исследования устойчивости на расчетных столах. Дейвис** (An analogue computer for network analyzer stability studies. Davis Charles M. — Abstr. doct. diss., Iowa State Coll., 1954), Iowa State Coll. J. Sci., 1956, **30**, № 3, 345 (англ.)

Генераторные единицы расчетных столов не являются аналогом синхронных машин и при исследовании устойчивости необходимо вручную изменять фазу выходного напряжения в соответствии с аналитически вычисленным углом относительного смещения ротора.

Для автоматизации и ускорения расчетов устойчивости сооружено электромеханическое моделирующее устройство, добавляемое к генераторным единицам расчетного стола, автоматически определяющее относительное смещение ротора генератора за данный отрезок времени в зависимости от разности механического и электрического моментов и инерции ротора исследуемой машины.

Выходной сигнал устройства через серводвигатель и редуктор воздействует на фазосдвигающий трансформатор. А. А. Крюков

4488 П. **Счетная машина. Мозер** (Accounting machines. Moser Frank Bo) (National Cash Register Co.). Канад. пат. 515.763, 16.08.55

Кассовый аппарат фирмы «Националь», имеющий небольшие конструктивные изменения по сравнению с прежними моделями кассовых аппаратов этой фирмы. Е. Н. Маквецов

4489 П. **Феррорезонансный триггер. Трист** (Ferroresonant flip-flops. Triest William E.) [International Business Machines Corp.] Пат. США 2 709 757, кл. 307—88, 31.05.55

Описан феррорезонансный триггер, состоящий из сопротивления, соединенного последовательно с четырехполюсником, образуемым двумя одинаковыми параллельными ветвями, каждая из которых образуется из последовательно соединенных двух катушек с железом и конденсаторов. Одна из катушек каждой ветви управляется током противоположной ветви. Все элементы подобраны таким образом, что в одной ветви протекает опережающий ток, в другой отстающий. При подаче управляющего импульса фаза токов в ветвях меняется: вместо опережающего протекает отстающий и наоборот. А. А. Крюков

4490 П. **Электрическая счетная система. Ларсен** (Electrical calculating systems. Larsen Fridthiof Oscar Valdemar) [Aktiebolaget Duba]. Пат. США, 2719671, кл. 235—61, 04.10.55

Универсальная счетная схема, работающая на электромеханическом принципе. В качестве счетчиков в схеме могут быть использованы счетчики табуляторов или вычислительных перфораторов или другие конструкции с механическим вращением счетных колес.

Передача чисел в счетчик — последовательная (поразрядная), и может производиться с десятиклавишной клавиатуры, перфоленты или другим последовательным способом. Оригинален принцип передачи числа в счетчик. Например, при передаче числа с клавиатуры нажатие любой клавиши вызывает включение вращения цифрового колеса какого-то разряда счетчика. Кроме того, подается напряжение на цифровую шину, соответствующую нажатой клавише. Цифровые шины выведены на головку счетчика, имеющую в каждом разряде 10 цифровых ламелей, расположенных по окружности. С цифровым колесом связан ползунок, скользящий по ламелям головки. Как только ползунок дойдет до ламели, находящейся под напряжением, вращение счетного колеса выключается, и цифра фиксируется в счетчике.

Схема может быть приспособлена для параллельной передачи числа во все разряды счетчика. В схеме предусмотрено, кроме сложения и вычитания чисел, также умножение. Схема работает на постоянном токе и может найти применение в счетно-аналитических или в суммирующих машинах. Е. Н. Маквецов

4491 П. **Прибор для определения моментов распределения. Фарбер** (Moments of distribution determining device. Farber Monroe). Пат. США 2726809, кл. 235—61, 13.12.55

Описание механического прибора для автоматического определения моментов статистического распределения. Прибор предназначен для нахождения моментов 1-го и 2-го порядка, но указано, что с помощью подобных инструментов можно находить и моменты высших порядков.

Основной частью прибора является балансир, свободно вращающийся в вертикальной плоскости, со свободно подвешенными к нему полыми трубками, имеющими дно. Точки вращения трубок расположены на балансире на одной прямой. Положение этих точек определяется по формуле в соответствии с условием задачи. В трубки кладут шарики. Когда во все трубки положено нужное количество шариков, стрелка покажет на шкале момент распределения.

Дается также описание прибора, с помощью которого можно определять моменты 2-го порядка. Принцип его действия аналогичен принципу действия 1-го прибора, но точки опоры свободно подвешенных трубок распределяются иным образом. Е. В. Вандышева

См. также: 3676, 3678, 4032 К

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абасов А. М. 4066
Авдеев Н. Я. 3955, 4029
Агаев Г. Н. 4023
Айзерман М. А. 3978, 4038, 4040
Андреев К. А. 4288 К
Андрианов Г. Н. 3766
Анисимова Е. П. 4308 Д
Аншелес О. М. 3701
Аргунов Б. И. 4290 К
Аржаных И. С. 4034
Артюхов М. М. 3768

Б

Багиров Х. Г. 3994
Бадалян Г. В. 3938
Балк М. Б. 4290 К
Балуев А. Н. 4187
Берман Д. Л. 3919, 3922, 3924 Д
Блох З. Ш. 4035
Боголюбов Н. Н. 4190
Бохан К. А. 3889
Брадистилов Г. 4108 К
Бреус К. А. 4044
Бриш Н. И. 3897
Бронский А. П. 3966
Бронштейн И. Н. 3699
Брук И. С. 4423
Будак Б. М. 3991
Бушнев А. А. 4300

В

Вагнер В. В. 3819
Веселовский И. Н. 3685
Вираненко Т. И. 4071, 4072
Викторовский Е. Е. 3894
Виленкин Н. Я. 4141
Вильгельм В. 3851
Вильнер И. А. 4402
Виноградов И. М. 3666, 3667
Волков Е. А. 4382
Ворович И. И. 3968
Выгодский М. Я. 3682

Г

Гаврилов М. А. 3856
Галетов І. П. 4086
Гальперин И. 4195 К
Гамкрелидзе Р. В. 3885
Гантмахер Ф. Р. 3978
Гарсиашвили Ш. Д. 4401
Гельфанд И. М. 4209
Георгиев Г. Ив. 4111 К
Герасименко Л. В. 3982
Гладкий А. В. 3876
Гливенко Е. В. 3887
Гольдберг А. А. 3971
Гребенюк Д. Г. 3753
Григорьева И. А. 3921, 4037
Гройсер М. Д. 3931
Гроссман Д. П. 4371, 4372
Гуменный П. В. 4392
Гуменюк В. С. 4376
Гуревич А. М. 3668

Д

Демидович Б. П. 4106
Депман И. Я. 3695
Джавадов 4335
Джарден 4279
Дин Ся-си 4008, 4027
Джваршейшвили А. Г. 3890
Дородное А. В. 3833

Е

Еремин И. И. 3780
Еремин С. А. 3961

Ж

Жаутыков О. А. 3703, 4045

З

Загорский Т. Я. 4022
Зморович В. А. 4134
Зуховицкий С. И. 4181

И

Ивадзава 3829
Иванов В. В. 4411 Д
Иванов В. И. 3860 Д
Ивахори 4122
Ивашев-Мусатов О. С. 3912
Ивницкий Т. Г. 4297
Измайлов В. Д. 4337
Ильин В. П. 4101
Исмайлов А. Я. 3920

К

Калашников М. Д. 3918
Камалов М. К. 4213
Камынин Л. И. 3969, 3970, 4381
Канэко 4383
Карасева Т. М. 3974
Карпусь Г. С. 4151
Кемхадзе Ш. С. 3791
Ким Кё Сек 3810
Кимура 4486
Коган Б. Я. 4462
Коробов Н. М. 3727
Крамар Ф. Д. 3705
Краснощекова Т. И. 3929
Красовский Н. Н. 3979
Краснов М. Л. 4013
Крейнин Я. Л. 3907
Кропотов А. И. 3714
Крылов Б. Л. 3972
Кузьмина А. Л. 3936
Куфарев П. П. 3945

Л

Лазарев В. Г. 3862 Д
Лапин А. И. 3831
Лаптев Б. Л. 4345
Левин Б. В. 3738
Ли Жун-хуа 4115
Линник Ю. В. 4208
Липин Н. В. 3796
Лобачевский Н. И. 4289 К
Ломадзе Г. А. 3732, 3733
Лю Гаун-сюнь 3777

М

Малышев А. В. 3734
Мамедов Я. Д. 4068
Маржик Я. 4103
Маринина С. Ф. 3731
Мееров М. В. 4039
Мельников И. Г. 4129
Мергелян С. Н. 3910, 4003
Микеладзе Ш. Е. 4369
Милошевић К. 4094
Минков Н. 4305 К
Можаев С. С. 3678
Молодший В. Н. 3695
Морозов М. И. 3916
Мурзаев Е. А. 3743
Мухаммеджан Х. Х. 3802
Мысовских И. П. 4385
Мышкис А. Д. 3675

Н

Нагата 3830
Наймарк М. А. 4183
Накагава 4486
Накаяма 3826
Натанзон В. Я. 3956
Нафталевич А. Г. 3959
Никайдо 4254

О

Орешина В. М. 4294
Охаси 4142

П

Панайоти Б. Н. 3988
Парасюк О. С. 4190
Пенков Б. 4214
Плись А. 3992
Плоткин Б. И. 3801
Поваров Г. Н. 3857, 3858
Погодичева Н. А. 3917
Поллак Д. 3828
Попов А. И. 3730
Постников А. Г. 3725, 3726
Потапов М. К. 3925 Д
Потоцкий М. В. 4285 К
Прудников В. Е. 3694
Пухальский В. И. 4307 К

Р

Разумихин Б. С. 3980
Романов Н. П. 3728
Романовский В. Б. 4080
Русак Б. И. 4291
Рыбкин Г. Ф. 3698

С

Саргсян И. С. 4095
Сатакэ 3773
Сахнович Л. А. 4180
Сенютович В. А. 4388
Сибуя 4122
Симония В. Т. 3845
Симура 3823
Скоробогатько В. Г. 4063
Слободецкий Л. Н. 3989
Смирнов М. М. 4026
Смирнов С. В. 4400
Смирнов Ю. М. 3874
Смирнова И. М. 4040
Соболев А. И. 4117
Солодовников А. С. 4354 Д
Стендер П. В. 3786
Стесин И. М. 4384
Стефанов Г. 4245
Стипанић Е. 3687
Суворов Г. Д. 3944
Сульдин А. В. 3806
Сунь Бэнь-ван 4346

Т

Терехова Н. П. 3871
Тиман А. Ф. 3917
Тихов М. Н. 3999
Тихонов В. И. 4261
Топчиев А. В. 3669
Торопов Е. Н. 3820 Д

У

Уфлянд Я. С. 4048

Ф

Фукухара 4142

Х

Хавинсон С. Я. 3909
Хапланов М. Г. 4118
Харит Ю. А. 4295
Хеброни 4282
Храмова М. И. 3989
Храмой А. В. 4455
Хуа Ло-гэн 4099
Хухунайшвили Г. Е. 3869

Ц

Цейтин Г. С. 3718, 3719
Цитланадзе Э. С. 4067
Цыпкин М. Е. 4325
Цю Пей-чжан 4091

Ч

Чакалов Л. 4135
Черникова Н. В. 3804
Черпаков П. В. 4005, 4006
Чечик В. А. 4366
Чудаков Н. Г. 3729
Чэнь Си-чжэнь 4098

Ш

Шайдуков К. М. 3898
Шафрановский И. И. 3700
Шилов Г. Е. 3702, 3789 К
Шноль Э. 3977
Шун М. С. 3931

Э

Эйдельнант М. И. 4262

Ю

Юрасов А. Н. 3861 Д
Юшков П. П. 4373

Я

Явлинский Н. А. 4449
Яглом А. М. 4209
Яненко Н. Н. 3990

A

Abita E. 4215
Abruzzi A. 4263
Adams J. F. 3882
Aggarwal O. P. 4235
Agmon S. 4028
Aiken H. H. 4431
Aissen M. 3927
Alexandroff P. S. 3904 К
Allen H. S. 4170, 4171
Ancochea G. 4318
Aquaro G. 3864
Artin E. 3793
Azaroff L. V. 4477

B

Babuška I. 4009
Backus J. W. 4428
Balada F. 3697
Ballantine J. P. 4390
Bambah R. 4356
Banaschewski B. 3868
Baratta M. A. 4024
Barner M. 4320
Bateman H. 4061 К
Battaglia A. 3752
Bauer W. F. 4460
Bayet M. 4057
Beck W. A. 4179
Behnke H. 3711
Behrens E.-A. 3848
Bellis D. R. 4469
Bellman R. 4253
Benson A. 3765
Benson R. E. 4418 К
Berkeš B. 4137
Berstein I. 3879
Bertolini F. 4001
Bertram G. 4370
Biermann K. R. 3692
Bilinski S. 4299
Birnbaum Z. W. 4222
Bittner I. 3693
Blachman N. M. 4429
Blackman J. 4237
Blanc C. 4380
Blanchard A. 4350
Blum J. R. 4212
Boccioni D. 3814
Boerma E. 4087
Bögel K. 3896
Bonfiglioli L. 4403
Borkmann K. 4032 К
Borsellino A. 4089
Bose S. K. 4153
Bozivich H. 4248 Д
Bracken R. H. 4432
Brauer R. 3790, 3791, 3792
Breen J. M. 4454
Broadbent S. R. 4228
Brödel W. 4144
Burdette E. W. 4435
Burzyński J. 4219 К
Buquet A. 3746
Bydžovský B. 4310, 4311

C

Calabi E. 3963
Campedelli L. 4303 К
Cannarozzo S. 4286 К
Carini G. 4052, 4053, 4054, 4056
Carlitz L. 3758
Carr III J. W. 4422, 4460
Cartan H. 3884
Case K. M. 3841
Castro A. de (Castro-Brzezicki de) 4070, 4127
Cellitti C. 3744
Černý V. 4475
Chak A. M. 4131
Chapman D. G. 4241
Chow Wei-Liang 4312
Chu J. T. 4225
Chu L. J. 4147 К
Ciarrapico L. 3865
Cinquini S. 4319
Clagett M. 3688, 3689
Climent V. H. 4439
Cohen I. B. 3691
Cohn G. I. 4149
Colebrook F. M. 4437
Coleman J. S. 4445
Commeau M. J. 4096
Constantinescu B. 3772
Constantinescu L. 3772
Conti R. 3975
Cook R. M. 4469
Copson E. T. 4017
Corbato F. J. 4147 К
Costier J. 3771
Couffignal L. 4426
Courant R. 4405
Cowell W. R. 3817
Crenn H. 4472
Crum M. M. 3891
Curtz T. B. 4139
Czipszer J. 3911

D

Dallmann P. 4274
Danø S. 4250
Dantzig G. B. 4249
Darmois G. 3709
Davis C. M. 4487 Д
Davis H. F. 4188
Davis R. M. 4033 Д
Debever R. 4348
DeCarlo C. R. 4446, 4452
DeClaris N. 3937
Delange H. 4081
Delcroix J.-L. 4057
Demidovici B. P. 4107 К
Denis-Papin M. 3683, 3684
Dennissé J.-F. 4057
Deuring M. 3824
Devidé V. 3815
Diaz J. B. 3987
Di Pasquale L. 4284
Dobrescu A. 4327 К
Doetsch G. 4160 К
Doležal V. 3954
Doornbos R. 4229
Douglas J., Jr 4377, 4379
Douglis A. 4011
Dowker C. H. 3875
Dowker Y. N. 3886
Dugué D. 4202
Duguid A. M. 3800
Duff G. F. D. 3997
Dvoretzky A. 3895

E

Edrei A. 3928
Eeles J., Jr. 4347
Egerváry J. 3788
Ehrenpreis L. 4182
Eichler M. 3737
Elfving G. 4224
Elianu I. P. 4000
Elliott J. 4069
Endl K. 4130
Epstein M. P. 3785
Estermann T. 3778
Evans A. 4119
Eve J. 4368
Eweida M. T. 4128

F

Fabian V. 4244
Faedo S. 4078, 4079
Fair W. R. 4469
Fantappié L. 4194
Farber M. 4491 П
Faulkner F. 4076
Federer H. 3883
Ferla A. 4055
Fisz M. 4203
Flett T. M. 4100
Forrester J. W. 4461
Fraïssé R. 3717, 3724
French C. S. 4469
Freund J. E. 4200
Frey T. 4112 К, 4124 К
Froda A. 3902, 4277
Frucht R. 4155
Fulks W. 4132

G

Gabard E. 3769
Gaier D. 3942
Gallo M. 4470
Ganea T. 3808
Gani J. 4391
Garaj J. 4340, 4341
García G. 4059, 4060
Gaudiot P. 4062 К
George E. J. 4404
Ghermănescu M. 4092
Glansdorff P. 4075
Gloden A. 3762
Gohier S. 4364
Golub A. 4232
Gomes R. L. 4343
Gómez Aguilar I. 3873
Gosselin R. P. 3913
Gran Olsson R. 4047
Gravina P. B. J. 4049
Gröbner W. 3835, 4041
Grosch H. R. J. 4430
Grubbs F. E. 4232
Guénot R. 4271
Gysen E. 3926

H

Haimo D. T. 3950
Haimovici A. 4338
Haldane J. B. S. 4223
Hall P. 3798, 3803
Hamblen J. W. 4273 Д
Hammer P. C. 4386, 4387
Hammersley J. M. 4393
Hampel R. 3749
Hannan J. F. 4243
Hanner O. 4167
Hanš O. 4199
Harish-Chandra 4184, 4185
Hartman P. 3983, 3996
Hartmanis J. 3850
Hastings C., Jr. 4398
Havel V. 4331
Hayward J. 4398
Hebroni P. 4282
Held E. F. M. van der 4396
Heller B. 4036
Hellwig G. 4014
Hemer Y. 3747
Heppes A. 4355
Hermann P. J. 4467
Herrmann O. 3736
Herzog F. 3930
Heselden G. P. M. 4133
Hewitt E. 4205
Hilton P. J. 3882
Hirokawa H. 4120
Hodges J. L., Jr 4234
Hof W. 3721
Hoffman A. J. 4251
Hofmann M. 4266
Hohenberg F. 3674
Holt W. W. 4469
Homma T. 3877
Horenstein W. 4140
Horgan R. B. 4413, 4414
Hornfeck B. 3739
Hornich H. 3986, 4010
Householder A. S. 4441
Huber A. 3964
Hughes D. R. 3818
Hunger E. 3680
Hurewicz W. 3875

I

Ikeda S. 4264
Ikenberry E. 4145
Ionescu-Ţiu C. 4116
Isbell J. R. 4186
Ishihara T. 4191, 4192, 4193
Iwasawa K. 3745
Izumi S. 4121

J

Jakimovski A. 4114
Jakubík J. 3854
Janne d'Othée H. 4230
Jarden Д. 4279
Jaworowski J. W. 3880
Jeffreys H. 4143
Jenkins G. M. 4227
Johnson G., Jr 3939
Jones D. S. 4051
Jongmans F. 4349
Jowett G. H. 4233
Juan y Hernandez E. 4172
Jucker E. 4470
Jůza M. 4165

K

Kabeš K. 4473
Kakehashi T. 3932, 3933
Kampé de Fériet J. 4189, 4258, 4259, 4260
Kanno T. 3844
Kantorowitsch L. W. 4409 К
Kaprekar D. R. 3759
Kárteszi F. 3696
Kasahara S. 4174
Katz A. A. 4425
Kaul R. N. 4332
Kennedy P. B. 4085
Kibbey D. E. 3981 К
Kielland E. C. 3712
Kießler F. 4407 К
Kinoshita T. 3720
Kitov A. I. 3676
Kjellberg B. 3957
Kjellberg G. 4436
Klee V. L., Jr 4166, 4175
Klika O. 4459
Klinkenberg H. 4275
Kluvánek I. 3888
Knopp K. 4125 К
Koecher M. 3735
Kolman E. 3677
Kosiński A. 3881
Kostant B. 4333, 4334
Krabbe G. L. 4169
Králik D. 3915
Krull W. 4073
Krzywoblocki M. Z. 4397
Krzyżański M. 4019
Kudlich R. A. 4427
Kuhn H. W. (ed.) 4109 К, 4251
Kulczycki St. 4304 К
Kuratowski K. 3872
Kurepa S. 4102

L

Larsen F. O. V. 4490 П
Larson H. T. 4444
Laskar W. 4058
Lauwen P. 4301
Lawley D. N. 4236
Lax P. D. 4012, 4021
Lazard M. 3807
Leapunov A. A. 3676
Lebesgue H. 3903
Ledermann S. 4269
Legras J. 4406 К
Lehto O. 3953
Leifer M. 4429
Leja F. 4084
Lelong P. 3781
Leruste P. 4218
Levi E. 4272 К
Levin F. 3855
Lichnerowicz A. 3782
Lida S. L. 4434
Little J. D. C. 4147 К
Litwiniszyn J. 4265
Lombardo-Radice L. 4360, 4362
Lorent H. 3690
Lo Voi A. 4306 К
Lowan A. N. 4140
Lukaszewicz J. 4410 К

M

McArthur C. W. 4168
Macdonald N. 4442

Mack C. 4201
McLain D. H. 3800
MacLane G. R. 3935
McMahon J. 4002
Magdonelle A. 3779
Magnus W. 4152
Maillot M. 3783
Mammana C. 4082
Manning H. P. 4353 К
Maravall Casesnoves D. 4344
Marcus S. 3901
Marlowe O. J. 4387
Marquet S. 4217
Matschinski M. 4357
Matsushita S. 3809
Mautner F. I. 4182
Mayer J. E. 4210
Mayer M. E. 4196 К
Mendelson E. 3906
Mendonça de Albuquerque L. 4302
Meyer H. A. 4408 К
Mickle E. J. 3899
Mihăileanu N. N. 4321
Mihăilescu T. 4326
Mihalaşcu D. 3776
Miles E. P., Jr 3985, 4016
Milgram A. N. 4021
Miller K. S. 4064
Miller M. 4287 К
Mitrinovitch D. S. 4126
Mohanty R. 3914
Moisil G. C. 3832, 3995, 4278
Montel P. 3708
Moorman R. H. 3681 К
Moran P. A. P. 4268, 4391
Mordell L. J. 3774
Morlat G. 4216
Morrey C. B., Jr. 4347
Morse P. M. 4147 К
Morton N. W. 4257
Moser F. B. 4488 П
Moshinsky M. 4058
Mostert P. S. 3812
Motchane L. 4123 К
Muller M. E. 4004
Müller P. F. 4471
Munkelt K. 4483
Muracchini L. 4324
Murgescu V. 4336

N

Nagai T. 4358
Nanda M. 3914
Negoescu N. 3741, 3742
Nehari Z. 3940
Néron A. 3821
Nevanlinna R. 4104
Neville E. H. 4281
Newns W. F. 4150
Niče V. 4315
Nishi M. 4313
Nohl W. 4352

O

Oberländer S. 4032 К
Oblâth R. 3770
Oblonský J. 4475, 4476
Oderfeld J. 4238
Odman S. T. A. 4375
Ogasawara T. 4176
Oldfield B. G. 4432
O'Neill E. L. 4163
Ore O. 3863
Orey S. 3715
Ostrowski A. 4093

P

Paige L. J. 3816
Palamà G. 3755
Paschkis V. 4480
Paszkowski S. 4412
Paul R. J. A. 4463, 4464, 4465
Pawlak Z. 4440
Penna A. M. 3984
Pepjung C. H. P. 4420 К
Perčinkova-V'čkova D. 4030
Pérès J. 3707
Perlis A. J. 4422
Pettineo B. 3892
Phatarford R. M. 4267
Philip J. R. 4378
Pickert G. 3679
Piranian G. 3930
Pleijel A. 4154
Poivert J. 4283
Pomilio I. 3866
Poritsky H. 4015
Porter F. J., Jr 4453
Pozner A. N. 4200
Prakash P. 4043
Prins H. J. 4229
Protter M. H. 4007
Puig Adam P. 4162
Purohit J. N. 4267
Putnam C. R. 4179

R

Rabbeno G. 4161
Radojčić M. 3962
Rachford H. H., Jr 4377
Ramanathan K. G. 3837, 3838
Rao C. R. 4220
Rao K. N. S. 3805
Rathie C. B. 4156
Reade M. 3949
Reddick H. W. 3981 К
Reichelderfer P. V. 3900
Reid W. P. 4025
Reissig R. 3976
Rényi A. 3911, 3947, 4197
Rényi K. 3947
Robbins H. 4243
Roberts J. H. 3870
Robinson G. de B. 3795
Roca J. L. 4439
Rodeja F. E. G. 4276
Roelcke W. 4090
Rohleder H. 3859
Röhrl H. 4105 К
Rosenbloom P. C. 4020
Rosser J. B. 3905
Rotkiewicz A. 3751
Rubin H. 4222
Rubin J. E. 3723
Rudolph J. A. 4467
Ryder F. 4474
Ryll-Nardzewski C. 4204

S

Salié H. 3757
Salzer H. E. 4389, 4395
Samuel P. 3834
San Juan Lloså R. 4252
Sansone G. 3975
Sasaki U. 4177
Sato I. 4351
Satô M. 4121
Satterly J. 4280
Sauer R. 4443
Schaefer H. 4018
Schieferdecker E. 3813
Schiek H. 3794
Schinzel A. 3750
Schmitt A. 4399
Schoenberg I. J. 3927
Schröder J. 4365
Schütte K. 4329, 4330
Schwartz L. 3998
Schwarz Št. 3811
Schweizer B. 3934
Scoins H. I. 4368
Segre B. 3993, 4309
Selberg S. 3756
Selmer E. S. 3748
Seres I. 3754
Serre J.-P. 3825
Servais F. 4367
Sharp E. M. 4433
Shenton L. R. 4198
Shields A. L. 3812
Shimrat M. 3867
Shimpuku E. 3720
Siegel K. M. 4139
Siegel S. 4246
Sieker K. H. 4293
Sierpinski W. 4083
Sindelar K. 3713
Singer I. 4173
Singh V. N. 4138
Snover J. E. 3965 Д
Sobociński B. 3716
Sobolev S. I. 3676
Sós V. T. 3740
Špaček A. 4244
Spampinato N. 4314, 4317
Spencer T. W. 4042
Stampacchia G. 4077
Starks K. H. 4467
Steel W. H. 4136
Steinfeld O. 3797, 3843
Steinman D. B. 3767
Stöcker C. 3847
Storchi E. 4046
Stratton J. A. 4147 К
Ströher W. 4359
Stroud A. H. 4386, 4387
Suschowk D. 4207
Suvorov G. D. 3941
Švec A. 4322
Swift J. D. 3686
Szełe T. 3775 К

T

Takács L. 4206 К
Takasu T. 4296, 4339
Tallini G. 3849
Tanaka Ch. 3958
Tandai K. 3852
Tanioka G. 4328
Taussky O. 3710
Teleman S. 4031
Terpstra T. J. 4239
Thale J. S. 3946
Tharrats J. M. 4439
Thébault V. 3763, 3764
Tietze H. 4074
Tikal F. 4473
Tippett L. H. C. 4247 К
Tornheim L. 3908
Toth I. 4298
Towner G. H. 4469
Tricomi F. G. 4065
Triebel F. 4419 К
Triest W. 4489 П
Tsuji M. 3943, 3951
Tucker A. W. (ed) 4109 К
Tukey J. W. 4231
Turán P. 3740

U

Umezawa T. 3948
Uzgören N. T. 4242

V

Valentine F. A. 4292, 4363
Van Laethem M. 4110 К
Vaona G. 4323
Varga O. 4342
Vasilach(e) S. 3967, 4157, 4158
Vazsonyi A. 4444
Veldkamp G. R. 3842
Venkatachalam Iyer R. 3761
Venkatachaliengar K. 3805
Vernotte P 4113
Viard J. 4472
Vicente Gonçalves J. 4097
Vidale M. L. 4255
Villa M. 4324
Volpato M. 3893

W

Walker M. J. 3846
Walsh J. E. 4256
Ward J. Y. 4136
Warlick C. H. 4374
Warmus M. 4410 К
Wasow W. 3973
Watanàbe S. 3853
Waterman D. 3952
Weil A. 3822
Weiss L. 3923, 4226
Wermer J. 4178
Whitney A. M. 3787, 3927
Whittle P. 4221
Whyburn G. T. 3878
Widder D. V. 4159
Williams E. 3985, 4016
Williams W. E. 4050
Wintner A. 3983, 3996, 4316
Wishart J. 4240
Wittich H. von 3960
Wolfowitz J. 4211
Wong T P., Jr 4398
Wong Y. K. 3784
Wynn P. 4394

X

Xiroudakis G. 3760

Y

Yang Ou Tchen 4148 К
Yoshii T. 3839, 3840
Yoshinaga K. 4176
Yosida Y. 4088
Young D. 4374

Z

Zadeh L. A. 4064, 4164
Zeisler E. B. 3722 К
Zelinsky D. 3827, 3836
Zuckerman H. S. 4205

სიმონია ვ. 3845

ქებხაძე შ. 3799

丁夏畦 4008, 4027
中山正 3826
中川隆 4486
二階堂副包 4254
佐武一郎 3773
刘光勋 3777
郎大橋三 4142
吳新謀 4008
孫本旺 4346
岩堀長慶 4122
岩澤健吉 3829
志村五郎 3823
木村一男 4486
李榮華 4115
永田雅宜 3830
澁谷泰隆 4122
福原關洲雄 4142
華羅庚 4099
邱佩璋 4091
金子曾政 4383
陳熙霞 4098
서터김 3810

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНЕНИЯ

К реф. 1074 (1956 г.)

Как сообщил в редакцию А. А. Виноградов, сформулированная в реферате теорема 2 неверна, а доказательство теоремы 1 содержит ошибку.

К реф. 1352 (1956 г.)

Как заметила С. С. Токмалаева, в книге Милна, формула (19.10) приведена с неправильными коэффициентами. В действительности эта формула, выражающая разность $y_1 - y_0$ через производные в 0, 1, 2, 3, 4 и 5-й точках, имеет вид:

$$y_1 - y_0 = \frac{h}{1440}(475y_0' + 1427y_1' - 798y_2' + 482y_3' - 173y_4' + 27y_5') - \frac{863}{60480}h^7y_{(5)}^{(7)}.$$

К реф. 6622 (1956 г.)

Редакция считает нужным отметить, что применительно к рассматриваемому в работе классу сингулярных уравнений А. Ф. Рахматуллина получила несколько более сильные результаты, чем А. И. Гуссейнов.

К реф. 8663 (1956 г.)

В реферате на стр. 26 имеются следующие опечатки:

Строка	Напечатано	Следует читать
3 сверху	$=(aa_1 \bigcap a_2 = a)$	$=a\ (a_1 \bigcap a_2 = a)$
5 »	$(a_1 \bigcap a_2 \geqslant a)$	$(a_1 \bigcap a_2 \leqslant a)$
6 »	$a_1 \geqslant a$ или $a_2 \geqslant a$	$a_1 \geqslant a$ $(a_1 \leqslant a)$ или $a_2 \geqslant a$ $(a_2 \leqslant a)$
10 »	$(\bigcap_i a_i \geqslant a)$	$(\bigcap_i a_i \leqslant a)$
11 »	$a_{i_0} \geqslant a$ для некоторого i_0	$a_{i_0} \geqslant a$ $(a_{i_0} \leqslant a)$ для некоторого i_0

И. В. Стеллецкий

К реф. 8888 К (1956 г.)

Мною неверно отмечено, что автор использует слабую компактность шара пространства L^∞. Используется верное предложение о слабой компактности множества ограниченных функционалов, принадлежащих L^∞.

М. М. Вайнберг

К реф. 206 (1957 г.)

На стр. 29, в левой колонке, строки 7—8 снизу, вместо слова «дедекиндова» следует читать «дистрибутивная» (ошибка вкралась при переводе реферата со словацкого языка на русский).

К реф. 736 (1957 г.)

На стр. 121, 1 строка, напечатано: «Проводится графическое сопоставление распределения размахов с плотностями распределения χ^2-квадрат, с различными степенями свободы». Следует: «Проводится графическое сопоставление распределения размахов с плотностями распределения величин $\alpha\chi$, где первый множитель — надлежаще подбираемая положительная постоянная, а квадрат второго следует распределению χ с различными степенями свободы».

Н. В. Смирнов

К реф. 1039 (1957 г.)

Строка 1 сверху — вместо «Содержание глав» должно быть «Содержит главы»; строка 13 снизу — вместо «Плотоина» должно быть «Плотина».

К реф. 1068 (1957 г.)

В левой колонке, строка 7 снизу, вместо «она считала» следует читать «он считал»; в правой колонке строка 12 сверху вместо «качественен» следует читать «применим».

К реф. 1253 (1957 г.)

На стр. 33, в левой колонке, строки 14—15 сверху индекс 2 в равенствах следует читать как 1.

М. Ф. Бокштейн

К реф. 1318 (1927 г.)

На стр. 44, строка 5 сверху вместо $z', \ni D, \ldots, z_n' \ni D$ должно быть $z_1' \in D, \ldots, z_n' \in D$; строка 8 сверху — вместо $\inf_{z \in D}[\rho(z_1, z_2) + \rho(z_1 z_2)]$ должно быть $\inf_{z \in D}[\rho(z_1, z) + (z, z_2)]$.

К реф. 1332 (1957 г.)

Имеются следующие опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
46	9 снизу	$e^{L/}$	$e^{L/2p}$
46	10 »	$S_{p,s}$	$S_{p,L}$
46	16 »	$S_{p,s}$, $\sum_{p,z}$, $\sum'_{p,z}$	$S_{p,L}$, $\sum_{p,L}$, $\sum'_{p,L}$
46	17 »	$\sum_p^1$	$\sum_p'$
47	1 сверху	$\lvert F'(z)$	$\lvert F'(z)\rvert$
47	2 »	$\frac{2p^2}{p-1}$	$\frac{2p^2}{2p-1}$

К реф. 1437 (1957 г.)

На стр. 59, строка 24 сверху — вместо «области» должно быть «области D»; строка 35 сверху — вместо «функциями» должно быть «и аналитическими функциями».

К реф. 1454 (1957 г.)

На стр. 64, строка 25 сверху — вместо «№ 1» должно быть «$N = 1$».

К реф. 1482 (1957 г.)

В выходных данных ошибочно указан год выхода журнала «1955», вместо «1956».

К реф. 2148 (1957 г.)

Следует отметить, что во 2-й части работы (в отличие от 1-й части — реф. 2147) подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{D}$ предполагается максимальной компактной.

И. З. Розенкноп

К реф. 3088 (1957 г.)

В шапке реферата строки 3, 4 и 5 следует читать (On certain critical points of a differential system in the plane. Barocio Samuel). Ann. Math. Studies 1956, № 36, 127—135 (англ.).

К реф. 3519 (1957 г.)

2-ю строку реферата читать так: «...зования теорем о свертке для преобразования Фурье»...

В. К. Саульев